On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x-1}$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Démontrer que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.
2. Conjecturer les limites de f puis dresser son tableau des variations
3. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.
4. Démontrer que le point I de coordonnées (1 ; 3) est le centre de symétrie de C.

CORRECTION

1. Pour tout $x \neq 1$, $2x + 1 + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{(2x+1)(x-1)+1}{x-1} = \dfrac{2x^2-2x+x-1+1}{x-1} = \dfrac{2x^2-x}{x-1} = f(x)$

2. Quand x est très grand et positif, $x - 1$ l'est aussi donc $\dfrac{1}{x-1}$ est très petit (voisin de 0) de plus $2x + 1$ est très grand et positif.

La somme d'un nombre très grand et positif et d'un nombre voisin de 0 est un nombre très grand et positif donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Si x est voisin de 1 (mais différent de 1), $x - 1$ est voisin de 0 donc $\dfrac{1}{x-1}$ est un nombre très grand, il reste à en trouver le signe.

si $x > 1$, $x - 1 > 0$ donc $\dfrac{1}{x-1}$ est un nombre très grand et positif

$2x + 1$ est voisin de 3, la somme des deux nombres est donc un nombre très grand et positif donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$.

si $x < 1$, $x - 1 < 0$ donc $\dfrac{1}{x-1}$ est un nombre très grand et négatif

$2x + 1$ est voisin de 3, la somme des deux nombres est donc un nombre très grand et négatif donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$.

$f'(x) = 2 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{2(x-1)^2-1}{(x-1)^2} = \dfrac{[\sqrt{2}(x-1)-1][\sqrt{2}(x-1)+1]}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\,(x-1)-1 = 0$ ou $\sqrt{2}\,(x-1)+1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 1$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 1$ d'où le signe de $2(x-1)^2 - 1$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+1$		1		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+1$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	$3-2\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3+2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

$f\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 + \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-1} = 2 + \dfrac{2}{\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$

$f\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 + \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-1} = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2}$

3. $f(x) = \dfrac{2x^2-x}{x-1}$ donc $f(0) = 0$

$f'(x) = 2 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$ donc $f'(0) = 2 - 1 = 1$

Une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)\,(x - 0) + f(0)$ soit $y = x$

4. Démontrer que le point I de coordonnées (1 ; 3) est le centre de symétrie de C.

Soit M(x ; $f(x)$) un point de C_f et M'(x' y') le symétrique de M par rapport à I

I est donc le milieu de [MM'] donc $\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2}=1 \\ \dfrac{f(x)+y'}{2}=3 \end{cases}$ donc $x' = 2 - x$ et $y' = 6 - f(x)$

La courbe C_f est symétrique par rapport à I si et si pour tout point M de C_f, M' appartient à C_f.

Il suffit donc de vérifier que pour tout x différent de 1, $f(x') = y'$ soit $f(2-x) = 6 - f(x)$.

$f(2-x) = 2(2-x) + 1 + \dfrac{1}{(2-x)-1} = 4 - 2x + 1 + \dfrac{1}{1-x}$

$f(2-x) = 5 - 2x - \dfrac{1}{x-1}$

$6 - f(x) = 6 - \left(2x+1+\dfrac{1}{x-1}\right) = 6 - 2x - 1 - \dfrac{1}{x-1}$

$6 - f(x) = 5 - 2x - \dfrac{1}{x-1}$ donc pour tout $x \neq 1$, $f(2-x) = 6 - f(x)$ donc le point I de coordonnées (1 ; 3) est le centre de symétrie de C_f.