**Pondichéry avril 2007**

**EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats**

L’espace est rapporté au repère orthonormal (O ;).

On considère le plan P d’équation 2 *x* + *y* – 2 *z* + 4 = 0 et les points A de coordonnées (3 ; 2 ; 6), B de coordonnées (1 ; 2 ; 4), et C de coordonnées (4 ; − 2 ; 5).

**1. *a*.** Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

***b*.** Vérifier que ce plan est le plan P .

**2. *a*.** Montrer que le triangle ABC est rectangle.

***b*.** Écrire un système d’équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P .

***c*.** Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.

***d*.** Calculer le volume du tétraèdre OABC.

**3.** On considère, dans cette question, le système de points pondérés *S* = {(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)}

***a*.** Vérifier que ce système admet un barycentre, qu’on notera G.

***b*.** On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).

***c*.** Déterminer la distance de G au plan P .

**4.** Soit Γ l’ensemble des points *M* de l’espace vérifiant :  = 5.

Déterminer Γ. Quelle est la nature de l’ensemble des points communs à P et Γ ?

**EXERCICE 2 5 points Candidats n’ayant pas suivi l’enseignement de spécialité**

**1.** *Dans cette question, il est demandé au candidat d’exposer des connaissances*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ;). Soit *R* la rotation du plan de centre Ω, d’affixe ωet d’angle de mesure θ. L’image par *R* d’un point du plan est donc définie de la manière suivante :

* *R*(Ω) = Ω
* pour tout point *M* du plan, distinct de ­, l’image *M*′ de *M* est définie par Ω*M*′ = Ω*M* et  = θ[2 *π*].

On rappelle que, pour des points *A* et *B* d’affixes respectives *a* et *b*, *AB* = | *b* – *a* | et = arg(*b* −*a*) [2 *π*].

*Question :* Montrer que les affixes *z* et *z*′ d’un point quelconque *M* du plan et de son image *M*′ par la rotation *R*, sont liées par la relation *z*′ − ω= e i θ (*z* – ω ).

**2.** On considère les points I et B d’affixes respectives *z*I = 1 + i et *z*B = 2 + 2 i.

Soit *R* la rotation de centre B et d’angle de mesure .

***a*.** Donner l’écriture complexe de *R*.

***b*.** Soit A l’image de I par *R*. Calculer l’affixe *z*A de A.

***c*.** Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l’angle .

***d*.** En déduire une mesure de l’angle 

**3.** Soit *T* la translation de vecteur . On pose A′ = *T* (A).

***a*.** Calculer l’affixe *z*A′ de A′.

***b*.** Quelle est la nature du quadrilatère OIAA′ ?

***c*.** Montrer que  est un argument de *z*A′.

**EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l’enseignement de spécialité**

**1.** *Dans cette question, il est demandé au candidat d’exposer des connaissances*

On suppose connus les résultats suivants :

* La composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;
* la transformation réciproque d’une similitude plane est une similitude plane ;
* une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l’identité du plan.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et *s* et *s*′ deux similitudes du plan telles que :

*s*(A) = *s*′(A), *s*(B)= *s*′(B) et *s*(C) = *s*′(C).Montrer que *s* = *s*′.

**2.** Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal O ;). La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points A d’affixe 2, E d’affixe 1 + i, F d’affixe 2 + i et G d’affixe 3 + i.

***a*.** Calculer les longueurs des côtés des triangles OAG et OEF. En déduire que ces triangles sont semblables.

***b*.** Montrer que OEF est l’image de OAG par une similitude indirecte *S*, en déterminant l’écriture complexe de *S*.

***c*.** Soit *h* l’homothétie de centre O et de rapport . On pose A′ = *h*(A) et G′ = *h*(G), et on appelle I le milieu de [EA′]. On note σla symétrie orthogonale d’axe (OI).Montrer que *S* = σ ◦ *h*.

**EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats**

On considère la fonction *f* définie sur [ 0 ; + ∞ [ par *f* (*x*) = .

**1.** Montrer que *f* est dérivable sur [ 0 ; + ∞ [.

Étudier le signe de sa fonction dérivée *f* ′, sa limite éventuelle en + ∞, et dresser le tableau de ses variations.

**2.** On définit la suite (*un*)*n*≥ 0 par son terme général *un* = 

***a*.** Justifier que, si *n* ≤ *x* ≤ *n* + 1, alors *f* (*n* + 1) ≤ *f* (*x*) ≤ *f* (*n*).

***b*.** Montrer, sans chercher à calculer *un* , que, pour tout entier naturel *n*, *f* (*n* + 1) ≤ *un* ≤ *f* (*n*).

***c*.** En déduire que la suite (*un*) est convergente et déterminer sa limite.

**3.** Soit *F* la fonction définie sur [ 0 ; + ∞ [ par *F*(*x*) = [ ln (*x* + 3) ]2.

***a*.** Justifier la dérivabilité sur[ 0 ; + ∞ [ de la fonction *F* et déterminer, pour tout réel positif *x*, le nombre *F*′(*x*).

***b*.** On pose, pour tout entier naturel *n*, *In* =*.* Calculer *In*.

**4.** On pose, pour tout entier naturel *n*, *Sn* = *u*0 + *u*1 +・・・+ *un*− 1.

Calculer *Sn*. La suite (*Sn*) est-elle convergente ?

**EXERCICE 4 6 points Commun à tous les candidats**

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

**1.** Dans cette question, on suppose que la probabilité qu’une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L’employé interroge 50 personnes de manière indépendante. On considère les évènements :

* A : « au moins une personne accepte de répondre »
* B : « moins de trois personnes acceptent de répondre »
* C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».

Calculer les probabilités des évènements A, B et C. On arrondira au millième.

**2.** Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire *X* qui, à tout groupe de *n* personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :



***a*.** Montrer que la probabilité qu’au moins trois personnes répondent est donnée par : *f* (*a*) = 1 – e–*a* .

***b*.** Calculer *f* (5). En donner l’arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?

**3.** On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d’entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

***a*.** Étudier les variations de la fonction *f* définie sur R+ par *f* (*x*) = 1 – e–*x* , ainsi que sa limite en + ∞.

Dresser son tableau de variations.

***b*.** Montrer que l’équation *f* (*x*) = 0,95 admet une solution unique sur +, et que cette solution est comprise entre 6,29 et 6,3.

***c*.** En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.

**CORRECTION**

**EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats**

**1. *a*.**  a pour coordonnées (– 2 ; 0 ; – 2) et  a pour coordonnées (1 ; – 4 ; – 1) les coordonnées de  et  ne sont pas proportionnelles donc les points A, B et C ne sont pas alignés, les points A, B et C définissent un plan.

***b*.** Les coordonnées de A vérifient 2 × 3 + 2 – 2 × 6 + 4 = 0 donc A appartient au plan P.

Les coordonnées de B vérifient 2 × 1 + 2 – 2 × 4 + 4 = 0 donc B appartient au plan P.

Les coordonnées de C vérifient 2 × 4 – 2 – 2 × 5 + 4 = 0 donc C appartient au plan P.

Par trois points non alignés passe un seul plan donc une équation du plan (ABC) est 2 *x* + *y* – 2 *z* + 4 = 0.

**2. *a*.** AB2 = 4 + 0 + 4 = 8 et AC2 = 1 + 16 + 1 = 18,  a pour coordonnées (3 ; – 4 ; 1) donc BC2 = 9 + 16 + 1 = 26

AB2 + AC2 = BC2 donc le triangle ABC est rectangle en A.

***b*.** Le vecteur  de coordonnées (2 ; 1 ; – 2) est normal au plan P donc est une vecteur directeur de Δ.

Un système d’équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P est  avec *t* ∈ .

***c*.** OK = *d*(O ; P) = 

***d*.** L’aire du triangle ABC est A = AB × AC = 

le volume du tétraèdre OABC est V = × A × OH = 

**3. *a*.** La somme des coefficients des points pondérés est 3 + 1 + 1 + 1 = 6 donc est non nulle donc le système *S* admet un barycentre.

***b*.** *S* = {(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)} donc G est le barycentre de *S* = {(O, 3), (I, 3)} donc G appartient à (OI).

***c*.** Les coordonnées de G sont :  soit .

*d*(G ; P) = 

**4.** Pour tout point M du plan :  donc 6 MG = 5 ⇔ MG = 

l’ensemble des points *M* de l’espace vérifiant :  = 5 est la sphère de centre G de rayon .

La distance du centre de la sphère au plan P est inférieure au rayon de la sphère donc l’ensemble des points communs à P et Γ est un cercle.

**EXERCICE 2 5 points Candidats n’ayant pas suivi l’enseignement de spécialité**

**1.** Ω*M*′ = Ω*M* ⇔, ou encore si M ≠ Ω soit *z* ≠ ω :  = 1.

 = θ[2 *π*] ⇔ 

 ⇔ 

⇔  est un complexe de module 1 d’argument θ et *z* ≠ ω ⇔  = e i θ et *z* ≠ ω ⇔ *z*’ – ω = e i θ (*z* – ω) avec *z* ≠ ω

⇔ *z*’ = e i θ (*z* – ω) + ω avec *z* ≠ ω.

Si *M* = Ω alors *M* ’ = Ω et la relation *z*’ = e i θ (*z* – ω) + ω est vérifiée donc est vraie pour tout point *M* du plan.

**2.** On considère les points I et B d’affixes respectives *z*I = 1 + i et *z*B = 2 + 2 i.

Soit *R* la rotation de centre B et d’angle de mesure .

***a*.** *R* a pour écriture complexe : *z*’ – *z*B = (*z* – *z*B) soit *z* = (*z* – 2 – 2 i ) + 2 + 2 i

*z* = *z* + 1 +  + i (1 – )

***b*.** *z*A = (1 + i ) + 1 +  + i (1 – ) = .

***c*.** OI2 = | 1 + i |2 = 2, IB2 = | 1 + i |2 = 2 et A est l’image de I par la rotation de centre B et d’angle de mesure  donc IA = IB

donc IO = IA = IB donc O, A et B sont sur un même cercle de centre I.

*z*B = 2 *z* I donc  donc I est le milieu de [OB] donc [OB] est un diamètre du cercle de centre I passant par A donc le triangle OAB est un triangle rectangle en A.

l’angle a pour mesure arg  ;  = 

 = donc  =

donc  =  donc  à 2 π près.

|  |  |
| --- | --- |
| ***d*.**  or  donc  donc  avec *k* ∈  soit  avec *k* ∈ **3. *a*.** *z*A′ = *z*A – (1 + i ) donc *z*A′ = ***b*.** doncle quadrilatère OIAA′ est un parallélogramme or IO = IA donc le quadrilatère OIAA′ est un losange. |  |

***c*.**  à 2 π près donc  à 2 π près.

Le quadrilatère OIAA′ est un losange donc (OA) est une bissectrice l’angle de  donc  à 2 π près  donc  à 2 π près donc arg *z* A’= – à 2 π près.

**EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l’enseignement de spécialité**

**1.** Soit S = *s* – 1 o s’, la composée deux similitudes planes est une similitude plane donc S une similitude.

A A 1 donc A 1 A donc S(A) = *s* – 1(A 1 ) = A

B B 1 donc B 1 B donc S(B) = *s* – 1(B 1 ) = B

C C 1 donc C 1 C donc S(C) = *s* – 1(C 1 ) = C

S est une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan donc S est l’identité du plan.

*s* – 1 o *s*’ = Id ⇔ *s* o *s* – 1 o *s*’ = *s* o Id ⇔ *s*’ = *s*

**2. *a*.** OA = 2 ; OG =  ; AG = 

OE = ; OF =  ; EF = 1

 donc les triangles OAG et OEF sont donc semblables.

***b*.** S’il existe une similitude indirecte S transformant OAG en OEF, son écriture est de la forme : *z*′ = *a*  + *b*, avec *a* ∈ , *b* ∈ .

S(O) = O ⇔ 0 = *a* × 0 + *b* donc *b* = 0

S(G) = F ⇔ 1 + i = 2 *a* + *b*

S(A) = E ⇔ 2 + i = *a* (3 – i) + *b*

1 + i = 2 *a* + *b* et *b* = 0 donc *a* = 

Vérification Si *z*’ =  alors  × (3 – i) = (3 – i + 3 i + 1) = 2 + i donc S(A) = E

L’écriture complexe de S est donc : *z*’ = .

***c*.** L’écriture complexe de *h* est : *z*′ = *z.* L’affixe de A′ est donc .

Le milieu I de [EA′] a pour affixe .

Soit σ = S o *h* – 1 , *h* – 1 est l’homothétie de centre O de rapport  donc d’écriture complexe *z*’ = *z*

S o *h* – 1 a pour écriture complexe *z*’ = ×  soit *z*’ = 

On vérifie que σ est une similitude indirecte laissant O invariant. Montrons que σ laisse I invariant :

 =  +  +  =  =  donc σ(I) = I

σ est une similitude indirecte laissant O et I invariants donc est une réflexion d’axe (OI).

**EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats**

**1.** Les fonction *x* → *x* + 3 et *x* → ln *x* sont dérivables respectivement sur IR et sur ] 0 ; + ∞ [, donc leur composée *x*→ ln (*x* + 3) est dérivable sur son domaine de définition ] – 3 ; + ∞ [

Les fonctions *x* → *x* + 3 et *x* → ln (*x* + 3) sont dérivable sur leurs domaines de définition donc leur quotient *f* est dérivable sur son domaine de définition.

*f* *'*(*x*) = 

*f* *'*(*x*) < 0 ⇔ 1 – ln (*x* + 3) < 0 et *x* ≥ 0 ⇔ ln (*x* + 3) > 1 et *x* ≥ 0 ⇔ *x* + 3 > e et *x* ≥ 0

*f* *'*(*x*) > 0 ⇔ *x* > e – 3 et *x* ≥ 0 or e – 3 < 0 donc pour tout *x* de [0 ; + ∞ [ *f* *'*(*x*) < 0

d’où le tableau de variation de *f*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 |  | + ∞ |
| *f* *'*(*x*) |  | – |  |
| *f* |  |  | 0 |

Soit X = *x* + 3, X = + ∞ et *f* (*x*) = 

or  = 0 donc *f* (*x*) = 0

**2. *a*.** *f* est décroissante sur [0 ; + ∞[ donc pour tout *n* de IN , *f* est décroissante sur [*n* ; *n* + 1]

donc pour tout *x* de [*n* ; *n* + 1], *f* (*n* + 1) ≤ *f* (*x*) ≤ *f* (*n*)

***b*.** pour tout *x* de [*n* ; *n* + 1], *f* (*n* + 1) ≤ *f* (*x*) ≤ *f* (*n*)

les fonctions intervenant dans cette inégalité sont continues sur [*n* ; *n* + 1]

donc  ≤  ≤

or  = *f* (*n* + 1) et = *f* (*n*) donc *f* (*n* +1) ≤ *un* ≤ *f* (*n*).

***c*.** *f* (*x*) = 0 donc *f* (*n*) = *f* (*n* + 1) = 0 donc d’après le théorème des gendarmes *u**n* = 0.

La suite (*un* ) est convergente et converge vers 0.

**3. *a*.** Les fonction *x* → *x* + 3 ; *x* → ln *x* ; *x* → *x*2 sont dérivables respectivement sur IR ; sur ] 0 ; + ∞ [ et IR donc leur composée *x* → [ln (*x*+ 3)]2 est dérivable sur son domaine de définition [0 ; + ∞ [

*F '*(*x*) = 2  = 2 *f* (*x*) donc la fonction *x* → *F*(*x*) est une primitive de *f* sur [0 ; + ∞ [

***b*.** *In* =  = [ln(*n* + 3)]2 – [ln 3 ]2

**4.** *S**n* = ++…+  = I*n*

*S**n* = [ln(*n* + 3)]2 – [ln 3 ]2

[ln(*n* + 3)]2 = + ∞ donc *S**n* = + ∞

La suite (*S**n* ) ne tend pas vers une limite finie donc diverge.

**EXERCICE 4 6 points Commun à tous les candidats**

**1.** On a une succession de 50 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d’elles a deux issues :

* la personne accepte de répondre (*p* = 0,1)
* la personne n’accepte pas de répondre (*q* = 1 – *p* = 0,9)

donc la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes acceptant de répondre suit un loi binomiale de paramètres (50 ; 0,1).

*p* (A) = *p* (X ≥ 1) = 1 – *p* (X = 0) ≈ 0,995

*p* (B) = *p* (X < 3) = *p* (X = 0) + *p* (X = 1) + *p* (X = 2) ≈ 0,112

*p*(C) = *p* (X ≥ 3) = 1 – *p*(B) ≈ 0,888.

**2. *a*.** *p* (X ≥ 3) =1 – (*p* (X = 0) + *p* (X = 1) + *p* (X = 2)) = 1 – e–*a* .

***b*.** *f* (5) = 1 – e– 5 =1 – e – 5 ≈ 0,875

*a* = 5 correspond à  soit *n* = 5, on obtient un résultat voisin de *p*(C).

**3. *a*.** La fonction *f* définie sur + par *f* (*x*) = 1 – e–*x* , est continue dérivable sur +.

*f*’(*x*) = e – *x* – e–*x* (1 + *x*) = e–*x*.

La fonction exponentielle est strictement positive sur  donc *f*’(*x*) > 0 sur ] 0 ; + ∞ [ et *f*’(0) = 0

*f* est strictement croissante sur +.

*f*(*x*) = 1 – *x*2 e –*x*  or  *x*2 e –*x* = 0 et =  donc  *f*(*x*) = 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 |  | + ∞ |
| *f* '(*x*) |  | – |  |
| *f* | 0 |  | 1 |

***b*.** La fonction *f* est définie continue strictement croissante sur [0 ; + ∞ [, *f*([0 ; + ∞ [) = [ 0 ; 1 [, 0,95 ∈ [ 0 ; 1 [, donc l’équation *f* (*x*) = 0,95 admet une solution unique α sur +.

*f*(6,29) ≈ 0,94979 et *f*(6,30) ≈ 0,95815 et α est comprise entre 6,29 et 6,30.

***c*.** La probabilité qu’au moins trois personnes répondent parmi *n* personnes interrogées est 1 – e–*x* , et *x* = .

*f* est strictement croissante sur + et *f*(α) = 0,95 donc il faut que ≥ α soit *n* ≥ 10 α or 62,9 < 10 α < 63 donc il faut donc interroger au minimum 63 personnes.