Dans un plan complexe muni du repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points I, J, A, B, C d'affixes respectives 1, i, – i, 2 i, – 2 i.

f est la transformation qui à tout point M distinct de C et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{8}{\overline{z} - 2\,\mathrm{i}}$.

1. Déterminer les affixes des images des points I et A par f.
2. Déterminer s'ils existent les antécédents des points B et O par f.
3. On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ et $z' = x' + \mathrm{i}\,y'$.
   a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y
   b. Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que M' appartienne à l'axe des réels
   c. Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que M' appartienne à l'axe des imaginaires
4. Déterminer l'ensemble (G) des points M tels que M' appartienne au cercle trigonométrique.

CORRECTION

1. $f(1) = \dfrac{8}{\overline{1 - 2\,\mathrm{i}}} = \dfrac{8\,(1 + 2\,\mathrm{i})}{(1 + 2\,\mathrm{i})\,(1 - 2\,\mathrm{i})} = \dfrac{8 + 16\,\mathrm{i}}{5}$ donc l'image du point I par f est le point I' d'affixe $\dfrac{8}{5} + \dfrac{16}{5}\,\mathrm{i}$.

$f(-\mathrm{i}) = \dfrac{8}{\overline{-\mathrm{i}} - 2\,\mathrm{i}} = \dfrac{8}{-\mathrm{i}} = 8\,\mathrm{i}$ donc l'image du point A par f est le point A' d'affixe 8 i.

2. Pour déterminer l'antécédent de B par f, il suffit de déterminer z tel que $f(z) = 2$ i donc résoudre $\dfrac{8}{\overline{z} - 2\,\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{i}$

Soit $8 = 2\,\mathrm{i}\,(\overline{z} - 2\,\mathrm{i}) \Leftrightarrow -4\,\mathrm{i} = \overline{z} - 2\,\mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z} = -2\,\mathrm{i} \Leftrightarrow z = 2\,\mathrm{i}$ donc l'antécédent de B par f est B

Pour déterminer l'antécédent de O par f, il suffit de déterminer z tel que $f(z) = 0$ donc résoudre $\dfrac{8}{\overline{z} - 2\,\mathrm{i}} = 0$ ce qui est impossible, O n'*a* pas d'antécédent par f.

3. *a.* $f(z) = \dfrac{8}{\overline{z} - 2\,\mathrm{i}} \Leftrightarrow x' + \mathrm{i}\,y' = \dfrac{2}{x - \mathrm{i}\,y - 2\,\mathrm{i}} = \dfrac{2}{x - \mathrm{i}\,(y + 2)} = \dfrac{2\,[\,x + \mathrm{i}\,(y + 2)\,]}{x^2 + (y + 2)^2}$

En égalant les parties réelles et imaginaires : $x' = \dfrac{2\,x}{x^2 + (y + 2)^2}$ et $y' = \dfrac{2\,y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}$.

b. M' appartient à l'axe des réels si et seulement si $y' = 0$ soit $\dfrac{2\,y + 4}{x^2 + (y + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2\,y + 4 = 0$ et $(x ; y) \neq (0 ; -2) \Leftrightarrow y = -2$ et $(x ; y) \neq (0 ; -2)$
(E) est la droite d'équation $y = -2$ privée du point C.

c. M' appartient à l'axe des imaginaires si et seulement si $x' = 0$ soit $\dfrac{2\,x}{x^2 + (y + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $(x ; y) \neq (0 ; -2)$

(F) est la droite d'équation $x = 0$ privée du point C.

4. M' appartient au cercle trigonométrique si et seulement si OM' = 1 soit $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{8}{\overline{z} - 2\,\mathrm{i}}\right| = 1 \Leftrightarrow 8 = |\,\overline{z} - 2\,\mathrm{i}\,|$

Or pour tout complexe Z $|\overline{Z}| = |Z|$ donc $|\,\overline{z} - 2\,\mathrm{i}\,| = |\,z + 2\,\mathrm{i}\,|$ donc $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow |\,z + 2\,\mathrm{i}\,| = 8 \Leftrightarrow$ CM = 8
(G) est le cercle de centre C de rayon 8.