Corrigé

Exercice 1.

1. Déterminer une primitive des fonctions sur l'intervalle I considéré dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$; $I =]0\ ;+\infty[$ ***b.*** $g(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^3}$; $I = \mathbb{R}$

Méthode : Quand vous recherchez une primitive d'une fonction f donnée, posez vous ces questions :

1) f est -elle une fonction usuelle (fonction constante ? fonction affine ? fonction carrée ? fonction cubique ? fonction puissance ? , fonction inverse ? fonction polynômiale ? fonction exponentielle ? …)

☞ Si la réponse est affirmative, vous pouvez directement donner une primitive en gardant à l'esprit qu'une primitive d'une somme de fonctions ($f + g$) est la somme des primitives ($F + G$ où F et G désignent respectivement une primitive de f et g sur l'intervalle considéré), et qu'une primitive du produit d'une fonction par un réel k ($k \times f$) est égale au produit du réel k par une primitive F de f sur l'intervalle considéré.

2) Sinon f apparaît -elle sous une forme usuelle (comme $u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ distinct de -1 , $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $u' e^u$) ?

Dans l'affirmative, penser à définir u puis à définir u'…

3) Dans le cas contraire, suivre les indications fournies dans l'énoncé ,(on vous invite à étudier une certaine fonction h dont la dérivée est f (ou à défaut dépend de f) etc.…)

Ici $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x} - x^{-3}$

f apparaît comme une différence de 2 fonctions usuelles (fonction inverse et fonction puissance)

Fonction φ	Fonction ψ (primitive de φ)
$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$	$\psi : x \mapsto \ln(x)$
$\varphi : x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$)	$\psi : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Ainsi une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \ln(x)$

Et une primitive de $x \mapsto x^{-3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \frac{x^{-3+1}}{-3+1}$ c'est-à-dire $x \mapsto -\frac{1}{2}x^{-2}$ ou encore $x \mapsto -\frac{1}{2x^2}$

Conclusion : Une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \ln(x) - \left(-\frac{1}{2x^2}\right)$ c'est-à-dire $x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{2x^2}$

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$.

Déterminer la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en -1.

Ici h n'est pas une fonction " usuelle ". On " passe " à la question 2 :

Si on pose $u(x) = x^4 + 1$, alors pour tout réel x, $u'(x) = 4x^3$.

Dans ces conditions, pour tout réel x, $h(x) = \frac{1}{4} \times \frac{4x^3}{x^4+1} = \frac{1}{4} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

h est de la forme $k \times \frac{u'}{u}$ donc une primitive de h est de la forme $k \ln u$

On en conclut qu'une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$x \mapsto \frac{1}{4}\ln(x^4+1)$

Comme les primitives de h sur $\mathbb{R}$ diffèrent d'une constante, on en déduit que la primitive H de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en – 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + \alpha$ où α est un réel à déterminer.

Comme $H(-1) = 0$ alors $\frac{1}{4}\ln(2) + \alpha = 0$ donc $\alpha = -\frac{1}{4}\ln(2)$

Conclusion : $H(x) = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) - \frac{1}{4}\ln(2)$

3. Calculer $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}dt$

Considérons la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}$.

Question 1 : « ce n'est pas une fonction usuelle ».

Question 2 : Si on pose $u(t) = \sqrt{t}$, alors pour tout réel t strictement positif, $u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

Dans ces conditions, pour tout réel t,

$$\frac{1}{\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}} = 2\times\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}} = 2\times u'(t)\ e^{u(t)}$$

C' est une fonction qui s'exprime sous la forme $k \times u'\ e^u$ et une primitive d'une telle fonction est de la forme $k\ e^u$ (k réel).

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}dt = 2\int_1^2 u'(t)e^{u(t)}dt = 2\left[e^{u(t)}\right]_1^2 = 2\left[e^{\sqrt{t}}\right]_1^2 = 2(e^{\sqrt{2}} - e)$$

4. Soit k une fonction définie sur [– 1 ;1], telle que pour tout réel x de [– 1 ;1], $-3 \le k(x) \le 2e$. Donner un encadrement de $\int_{-1}^1 k(x)dx$

Le but est d'encadrer l'intégrale de la fonction $x \mapsto k(x)$ sur [– 1 ;1].

Méthode : Pour l'encadrer, on cherche à encadrer k sur [– 1 ;1].

Or ici il n'y a rien à faire, on vous le donne déjà : pour tout réel x de [– 1 ;1], $-3 \le k(x) \le 2e$.

Par croissance de l'intégrale, il en résulte que :

$$\int_{-1}^1 -3dx \le \int_{-1}^1 k(x)dx \le \int_{-1}^1 2edx$$

☞ Rappel : L'intégrale d'une fonction constante sur l'intervalle [a ;b] est égale au produit de la constante par la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure de l'intégrale c'est-à-dire que si M désigne un réel, alors $\int_a^b Mdx = M\int_a^b 1dx = M[x]_a^b = M(b-a)$

Ainsi : $\int_{-1}^1 -3dx = -3(1-(-1)) = -6$ et $\int_{-1}^1 2edx = 2e(1-(-1)) = 4e$

Conclusion : $-6 \le \int_{-1}^1 k(x)dx \le 4e$

Exercice 2.

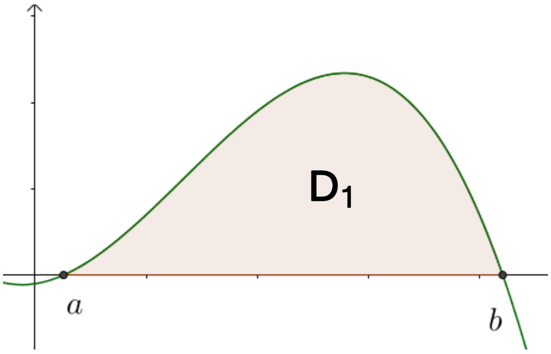
La courbe C ci-dessous représente une fonction h dans un repère orthonormé et A est l'aire exprimée en unités d'aire du domaine coloré.

1. α désigne l'abscisse, avec $2 < \alpha < 3$, du point d'intersection de C avec l'axe des abscisses. A est égale à :

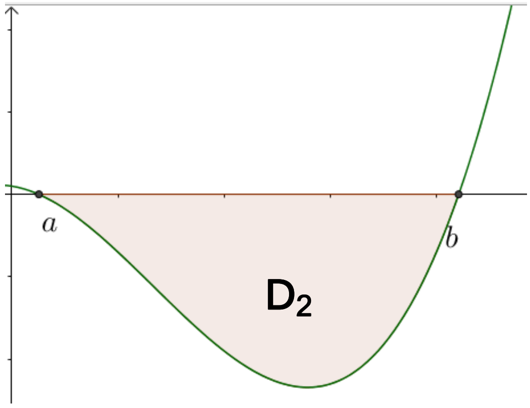
   a) $\int_{-1}^{\alpha} h(x)dx + \int_{\alpha}^{4} h(x)dx$ **b)** $\int_{-1}^{\alpha} h(x)dx - \int_{\alpha}^{4} h(x)dx$ **c)** $-\int_{-1}^{\alpha} h(x)dx + \int_{\alpha}^{4} h(x)dx$

Bonne réponse : réponse *c*

☞ Rappel : Lorsqu'une fonction f est continue et positive sur $[a\,;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire du domaine D_1 délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ c'est-à-dire que : $\int_a^b f(x)dx = -$ A(D_1)

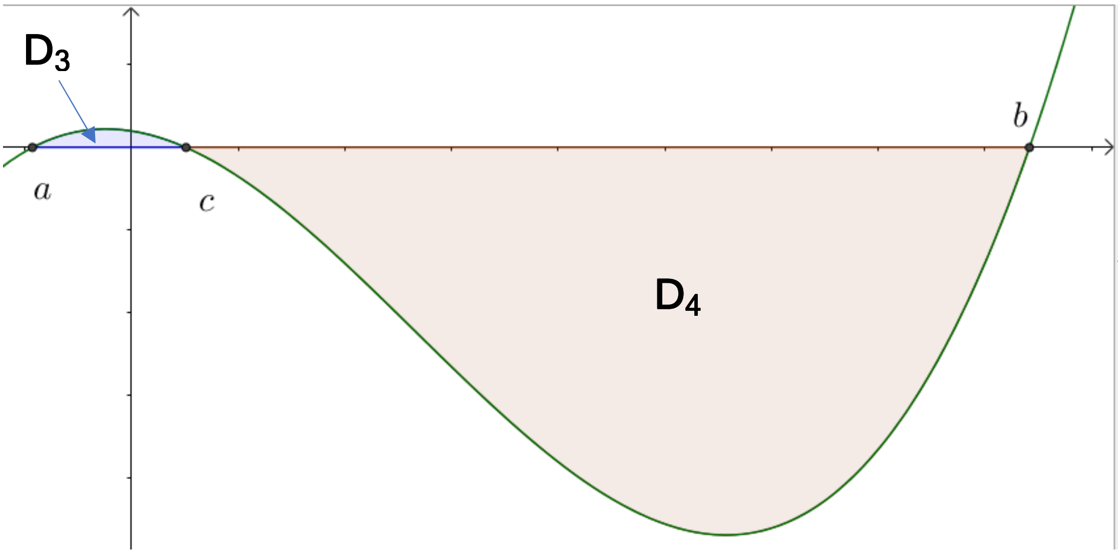


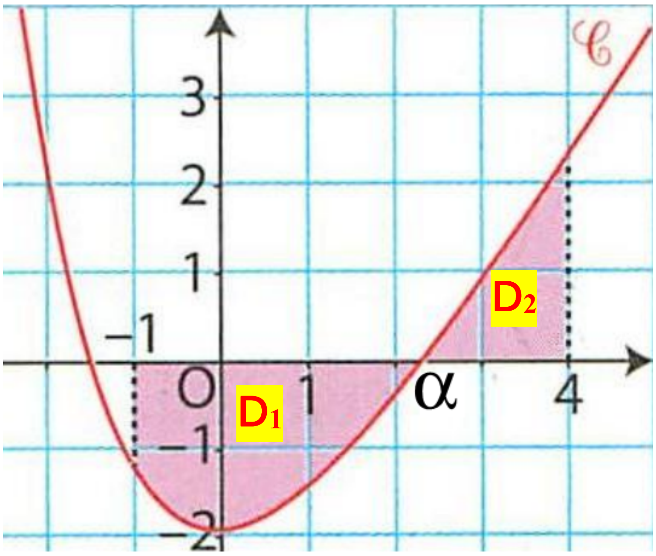
Par contre, si f est continue et négative sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ désigne l'opposé de l'aire du domaine D_2 c'est-à-dire que $\int_a^b f(x)dx = -$ A(D_2) ou encore A(D_2) $= -\int_a^b f(x)dx$



Enfin l'aire , en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe C ,
l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est la somme des aires des deux domaines D_3 et D_4

C'est-à-dire A(D_3)+A(D_4) avec A(D_3)= $\int_a^c f(x)dx$ et A(D_4) $= -\int_c^b f(x)dx$





Ici l'aire du domaine est égale à $-\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\alpha}^{4} f(x)dx$

2. $\int_{-1}^{4} h(x)dx$ est comprise entre :

a) – 5 et – 3 **b)** – 3 et – 1 **c)** 1 et 3.

Méthode : La seule dont on dispose est de " compter en unité d'aire "

D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-1}^{4} h(x)dx = \int_{-1}^{\alpha} h(x)dx + \int_{\alpha}^{4} h(x)dx$$

Or $\int_{-1}^{\alpha} h(x)dx = -$ A(D_1) ≈ – 4,4 et $\int_{\alpha}^{4} h(x)dx =$ A (D_2) ≈ 2,2

Il en résulte que $\int_{-1}^{4} h(x)dx = \int_{-1}^{\alpha} h(x)dx + \int_{\alpha}^{4} h(x)dx \approx -4{,}4 + 2{,}2 \approx 2{,}2$

On en déduit alors que $\int_{-1}^{4} h(x)dx$ est une valeur comprise entre – 3 et – 1.

3. Sur l'intervalle [0 ;α], la fonction $x \mapsto \int_{0}^{x} h(t)dt$:

a) est croissante **b)** est décroissante **c)** change de variation

Notons φ : $x \mapsto \int_{0}^{x} h(t)dt$

φ représente la primitive de h sur [0 ; α] qui s'annule en 0. Cela signifie que la dérivée de φ sur [0 ; α] est h et φ(0)=0

Pour déterminer le sens de variation de φ sur [0 ; α], on cherche le signe de sa dérivée. Or sa dérivée est h et graphiquement, $h(x) \leq 0$ pour $x \in [0 ; \alpha]$. Il en résulte donc que pour tout x de [0 ;α], φ'(x) ≤ 0 et par suite φ est décroissante sur [0 ; α].

4. Sur l'intervalle [α ;4], la fonction $x \mapsto \int_x^{\alpha} h(t)dt$ est:

a) positive **b)** négative **c)** de signe quelconque.

Notons ψ : $x \mapsto \int_x^{\alpha} h(t)dt$

ψ représente la primitive de h sur [α ;4] qui s'annule en α.

Cela signifie que la dérivée de φ sur [α ;4] est h et ψ(α) =0.

On souhaite détermine le signe de ψ sur [α ;4].

On remarque que dans l'intégrale $\int_x^{\alpha} h(t)dt$, les bornes ne sont pas rangées dans l'ordre croissant

(x appartenant à l'intervalle [α ;4], cela sous-entend que $x \geq \alpha$).

Aussi pour interpréter correctement, on va " ranger les bornes " dans l'ordre croissant.

Pour tout x de [α ;4], $\psi(x) = \int_x^{\alpha} h(t)dt = -\int_{\alpha}^{x} h(t)dt$

Soit $x \in]\alpha ;4]$

Graphiquement pour $t \in [\alpha ;x]$, on remarque que $h(t) \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{\alpha}^{x} h(t)dt \geq 0 \text{ et donc } -\int_{\alpha}^{x} h(t)dt \leq 0 \text{ c'est-à-dire } \psi(x) \leq 0$$

Enfin pour $x = \alpha$, on a : $\psi(x) = \psi(\alpha) = 0$

Finalement, pour tout x de [α ;4], $\psi(x) \leq 0$

Ainsi, ψ est négative sur [α ;4]