ENONCE

On pourra utiliser sans justification que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

La partie I est l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\ln x}{x}$

L'étude de la fonction f fait l'objet de la partie II.

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par: $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\ln x}{x}$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ (unité graphique 2cm).

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2. *a*. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C).

   c. Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
   Montrer en particulier que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on déterminera.

3. Étudier le sens de variation de f.
   Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (Δ).
   Préciser les coordonnées de B.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α.
   Justifier l'encadrement: $0{,}34 < \alpha < 0{,}35$
6. Tracer la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).

CORRECTION

Partie I

1. g est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $g'(x) = 2x - 2\dfrac{1}{x} = 2\,\dfrac{x^2-1}{x} = 2\,\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$

$x > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $x - 1$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	1	↗	

2. g est décroissante sur $]\,0\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty\,[$ donc g admet un minimum en 1, $g(1) = 1$ donc pour tout $x > 0$, $g(x) \geq 1$ donc $g(x) > 0$

Partie II

1. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} \times (1 + \ln x)$

or $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 + \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} \times (1+\ln x) = -\infty$

de plus $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ (C) admet pour asymptote la droite d'équation $x = 0$

2. *a*. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b. $f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \dfrac{x}{2} = 0$

c. $f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\ln x}{x}$ or $1 + \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$1 + \ln x$	$-$	0	$+$
$f(x) - \dfrac{x}{2}$	$-$	0	$+$
Position relative de (C) et (Δ)	(C) en dessous de (Δ)	Point d'intersection	(C) au dessus de (Δ)

A est le point d'abscisse e^{-1} donc d'ordonnée $y = \dfrac{1}{2}e^{-1}$.

3. $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x)}{x^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln x}{x^2}$ donc $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2\ln x}{2x^2} = \dfrac{g(x)}{2x^2}$

$f'(x)$ a donc le même signe que $g(x)$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$
$f'(x)$	$+$
g	$-\infty \nearrow +\infty$

4. La tangente (T) à (C) est parallèle à (Δ) si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux soit $f'(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2\ln x}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

B est le point d'abscisse 1 donc d'ordonnée $y = f(1) = \dfrac{3}{2}$.

5. f est définie continue sur $]0 ; +\infty[$ strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$; $f(]0 ; +\infty[) = \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0 ; +\infty[$.

$f(0,34) < 0$ et $f(0,35) > 0$ donc $0,34 < \alpha < 0,35$

6. Tracer la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).