Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale : $\mathrm{I} = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{2-x}\right) dx$

1. *a.* Étudier les variations de la fonction $f : x \to f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle [0 ; 1].

b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], on a $\frac{1}{e} \le f(x) \le \frac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par $\mathrm{J} = \int_0^1 (2+x)\,e^{-x}\,dx$ et $\mathrm{K} = \int_0^1 x^2\, f(x)\,dx$.

a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $\mathrm{J} = 3 - \frac{4}{e}$.

b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que : $\frac{1}{3e} \le \mathrm{K} \le \frac{1}{6}$.

c. Démontrer que J + K = 4 I .

d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I , puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I .

CORRECTION

1. *a.* $f'(x) = \frac{-e^{-x}(2-x) - (-1)\,e^{-x}}{(2-x)^2} = \frac{e^{-x}(x-1)}{(2-x)^2}$. La fonction exponentielle est strictement positive, sur [0 ; 1], $x - 1 \le 0$

x	0		1
$f'(x)$		−	0
f	0,5	↘	e^{-1}

b. f est strictement décroissante sur [0 ; 1]donc pour tout x de [0 ; 1], $f(1) \le f(x) \le f(0)$ donc pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $\frac{1}{e} \le f(x) \le \frac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par $\mathrm{J} = \int_0^1 (2+x)\,e^{-x}\,dx$ et $\mathrm{K} = \int_0^1 x^2\, f(x)\,dx$.

a. Soit $u'(x) = e^{-x}$ alors $u(x) = -e^{-x}$
$v(x) = 2 + x$ donc $v'(x) = 1$

$$\mathrm{J} = \left[-(2+x)\,e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\,dx = -3\,e^{-1} + 2 - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -3\,e^{-1} + 2 - e^{-1} + 1 = -4\,e^{-1} + 3 = 3 - \frac{4}{e}.$$

b. Pour tout x de [0 ; 1], $\frac{1}{e} \le f(x) \le \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{e}x^2 \le x^2 f(x) \le \frac{1}{2}x^2$

Les fonctions $x \to \frac{1}{e}x^2$; $x \to x^2 f(x)$ et $x \to \frac{1}{2}x^2$ sont continues sur [0 ; 1] donc $\int_0^1 \frac{1}{e}x^2 dx \le \int_0^1 x^2\, f(x)\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx$

soit $\frac{1}{e}\int_0^1 x^2 dx \le \mathrm{K} \le \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx$

or $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ donc en remplaçant : $\frac{1}{3e} \le \mathrm{K} \le \frac{1}{6}$.

c. $\mathrm{J} + \mathrm{K} = \int_0^1 (2+x)\,e^{-x}\,dx + \int_0^1 x^2\, f(x)\,dx = \int_0^1 \left[(2+x)\,e^{-x} + \frac{x^2\,e^{-x}}{2-x}\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{4\,e^{-x}}{2-x}\right] dx = 4\int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{2-x}\right) dx$

donc J + K = 4 I.

d. $\frac{1}{3e} \le \mathrm{K} \le \frac{1}{6}$ donc $3 - \frac{4}{e} + \frac{1}{3e} \le \mathrm{J} + \mathrm{K} \le \frac{1}{6} + 3 - \frac{4}{e}$. soit $3 - \frac{11}{3e} \le 4\,\mathrm{I} \le \frac{19}{6} - \frac{4}{e}$

$\frac{3}{4} - \frac{11}{12\,e} \le \mathrm{I} \le \frac{19}{24} - \frac{1}{e}$ donc $0{,}41 \le \mathrm{I} \le 0{,}43$