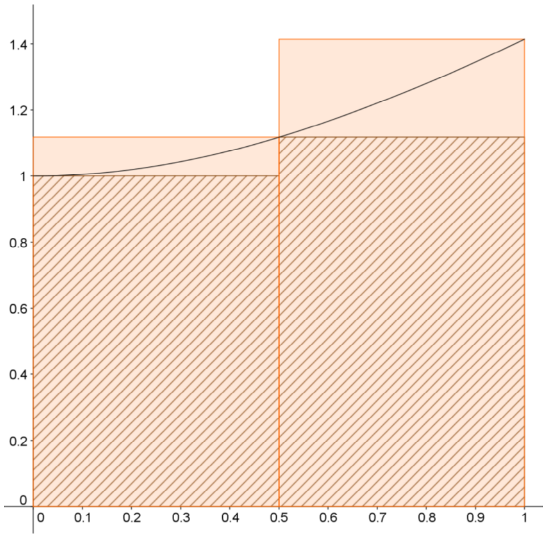
La fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ est continue strictement croissante sur [0 ; 1].

Le but de l'exercice est de déterminer un encadrement de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles.

1. Montrer que $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}$
2. En utilisant une subdivision de [0 ; 1] en trois segments de même longueur, déterminer un encadrement de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. En utilisant une subdivision de [0 ; 1] en n segments de même longueur, déterminer un algorithme permettant d'obtenir un encadrement de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

CORRECTION



La fonction f est définie continue positive sur [0 ; 1] donc $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ est une mesure de l'aire A limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

En découpant [0 ; 1] en deux segments, et en dessinant des rectangles trop petits (hachurés) puis des rectangles trop grands (colorés), on peut encadrer $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Le premier rectangle trop petit a pour largeur $\frac{1}{2}$ et pour longueur $f(0)$ donc pour aire $\frac{1}{2}\,f(0)$.

Le second rectangle trop petit a pour largeur $\frac{1}{2}$ et pour longueur $f\left(\frac{1}{2}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{2}\,f\left(\frac{1}{2}\right)$

L'aire A est supérieure à la somme des aires des rectangles hachurés donc $\frac{1}{2}\,f(0) + \frac{1}{2}\,f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $f(0) = \sqrt{1+0^2} = 1$ donc $\frac{1}{2}\,f(0) + \frac{1}{2}\,f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}$

donc $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Le premier rectangle trop grand a pour largeur $\frac{1}{2}$ et pour longueur $f\left(\frac{1}{2}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{2}\,f\left(\frac{1}{2}\right)$

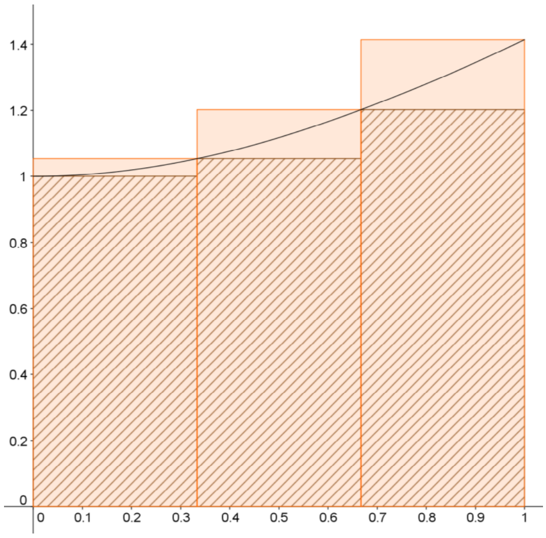
Le second rectangle trop grand a pour largeur $\frac{1}{2}$ et pour longueur $f(1)$ donc pour aire $\frac{1}{2}\,f(1)$ donc $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\,f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,f(1)$

or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $f(1) = \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2}$ donc $\frac{1}{2}\,f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,f(1) = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\times\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}$

L'aire A est inférieure à la somme des aires des rectangles colorés donc $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}$.

donc $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}$

2. En découpant [0 ; 1] en trois segments de même longueur, on obtient les segments : $\left[\ 0\,;\frac{1}{3}\ \right]$; $\left[\ \frac{1}{3};\frac{2}{3}\ \right]$; $\left[\ \frac{2}{3};1\ \right]$.



En procédant de la même façon qu'à la question 1.

Le premier rectangle trop petit a pour largeur $\frac{1}{3}$ et pour longueur $f(0)$ donc pour aire $\frac{1}{3}\ f(0)$.

Le deuxième rectangle trop petit a pour largeur $\frac{1}{3}$ et pour longueur $f\left(\frac{1}{3}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{3}\ f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Le troisième rectangle trop petit a pour largeur $\frac{1}{3}$ et pour longueur $f\left(\frac{2}{3}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{3}\ f\left(\frac{2}{3}\right)$.

donc $\frac{1}{3}\ f(0)\ +\ \frac{1}{3}\ f\left(\frac{1}{3}\right)\ +\ \frac{1}{3}\ f\left(\frac{2}{3}\right) \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}\,x$

or $f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ et $f(0) = 1$ donc $\frac{1}{3}\ f(0)\ +\ \frac{1}{3}\ f\left(\frac{1}{3}\right)\ +\ \frac{1}{3}\ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{13}}{3}$

donc $\frac{3+\sqrt{10}+\sqrt{13}}{9} \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}\,x$.

Le premier rectangle trop grand a pour largeur $\frac{1}{3}$ et pour longueur $f\left(\frac{1}{3}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{3}\ f\left(\frac{1}{3}\right)$

Le deuxième rectangle trop grand a pour largeur $\frac{1}{3}$ et pour longueur $f\left(\frac{2}{3}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{3}\ f\left(\frac{2}{3}\right)$

Le troisième rectangle trop petit a pour largeur $\frac{1}{3}$ et pour longueur $f(1)$ donc pour aire $\frac{1}{3}\ f(1)$

donc $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}\,x \leq \frac{1}{3}\ f\left(\frac{1}{3}\right)\ +\ \frac{1}{3}\ f\left(\frac{2}{3}\right)\ +\ \frac{1}{3}\ f(1)$.

or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $f(1) = \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2}$ donc $\frac{1}{2}\ f\left(\frac{1}{2}\right)\ +\ \frac{1}{2}\ f(1) = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\times\sqrt{2}$ donc $\frac{1}{3}\ f\left(\frac{1}{3}\right)\ +\ \frac{1}{3}\ f\left(\frac{2}{3}\right)\ +\ \frac{1}{3}\ f(1)$

$= \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{13}}{3} + \frac{1}{3}\times\sqrt{2}$ donc

$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}\,x \leq \frac{\sqrt{10}+\sqrt{13}+3\sqrt{2}}{9}$.

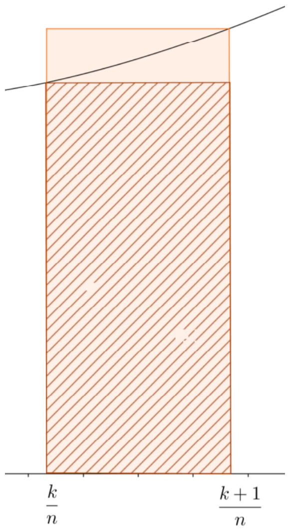
donc $\frac{3+\sqrt{10}+\sqrt{13}}{9} \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}\,x \leq \frac{\sqrt{10}+\sqrt{13}+3\sqrt{2}}{9}$

3. Avant de déterminer un algorithme, il faut trouver un encadrement de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}\,x$.

En découpant [0 ; 1] en n segments de même longueur, on obtient les segments : $\left[\ 0\,;\frac{1}{n}\ \right]$; $\left[\ \frac{1}{n};\frac{2}{n}\ \right]$; … $\left[\ \frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\ \right]$; $\left[\ 1-\frac{2}{n};1-\frac{1}{n}\ \right]$ $\left[\ 1-\frac{1}{n};1\ \right]$. Chaque rectangle a pour largeur $\frac{1}{n}$.

En procédant de la même façon qu'aux questions 1 et 2.

Le premier rectangle trop petit a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour longueur $f(0)$ donc pour aire $\frac{1}{n}\ f(0)$



Le deuxième rectangle trop petit a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour longueur $f\left(\frac{1}{n}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{n}\ f\left(\frac{1}{n}\right)$

…

Le rectangle trop petit de base $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour longueur $f\left(\frac{k}{n}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{n}\ f\left(\frac{k}{n}\right)$, etc.

L'avant dernier rectangle de base $\left[1-\frac{2}{n};1-\frac{1}{n}\right]$ a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour longueur $f\left(\frac{n-2}{n}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{n}\ f\left(\frac{n-2}{n}\right)$.

Le dernier rectangle de base $\left[1-\frac{1}{n};1\right]$ a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour longueur $f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{n}\ f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

donc $\frac{1}{n}\ f(0)\ +\ \frac{1}{n}\ f\left(\frac{1}{n}\right)\ +\ldots+\ \frac{1}{n}\ f\left(\frac{k}{n}\right)\ +\ldots+\ \frac{1}{n}\ f\left(\frac{n-1}{n}\right)\leq\int_0^1\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}\,x$

Le premier rectangle trop grand a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour longueur $f\left(\frac{1}{n}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{n}\ f\left(\frac{1}{n}\right)$

Le deuxième rectangle trop grand a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour longueur $f\left(\frac{2}{n}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{n}\ f\left(\frac{2}{n}\right)$.

…

Le rectangle trop grand de base $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour longueur $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{n}\ f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

…

L'avant dernier rectangle de base $\left[1-\frac{2}{n};1-\frac{1}{n}\right]$ a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour longueur $f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{n}\ f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

Le dernier rectangle de base $\left[1-\frac{1}{n};1\right]$ a pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour longueur $f(1)$ donc pour aire $\frac{1}{n}\ f(1)$

donc $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}\,x\leq\frac{1}{n}\ f\left(\frac{1}{n}\right)\ +\ldots+\ \frac{1}{n}\ f\left(\frac{k}{n}\right)\ +\ldots+\ \frac{1}{n}\ f\left(\frac{n-1}{n}\right)\ +\ \frac{1}{n}\ f(1)$

On a donc l'encadrement :

$\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\leq\int_0^1\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}\,x\leq\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)\right]$

Soit $\mathrm{S}_n=\ f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ alors $\frac{1}{n}\left[f(0)+\mathrm{S}_n\right]\leq\int_0^1\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}\,x\leq\frac{1}{n}\left[\mathrm{S}_n+f(1)\right]$.

L'algorithme va dans un premier calculer S_n puis dans un second temps calculer $\frac{1}{n}\left[f(0)+\mathrm{S}_n\right]$ et $\frac{1}{n}\left[\mathrm{S}_n+f(1)\right]$ et donc donner un encadrement de I

<table>
<tr><th>Langage naturel</th><th>Sous AlgoBox</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>Entrée</td><td>n est un nombre entier
S est un nombre réel
Imin est un nombre réel
Imax est un nombre réel
k est un nombre entier</td></tr>
<tr><td>Initialisation</td><td>Lire n
S prend la valeur 0</td></tr>
<tr><td>Traitement</td><td>Pour k allant de 1 à $n - 1$
    S prend la valeur S+$f(k/n)$
fin pour
Imin prend la valeur (S+$f(0)$)/n
imax prend la valeur (S+$f(1)$)/n</td></tr>
<tr><td>Sortie</td><td>afficher "valeur minimale : "
afficher Imin
afficher "valeur maximale : "
afficher imax
FIN_ALGORITHME</td></tr>
</table>
</td><td>
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  Imin EST_DU_TYPE NOMBRE
  Imax EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  S PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A n-1
    DEBUT_POUR
    S PREND_LA_VALEUR S+F1(k/n)
    FIN_POUR
  Imin PREND_LA_VALEUR (S+F1(0))/n
  Imax PREND_LA_VALEUR (S+F1(1))/n
  AFFICHER "valeur minimale : "
  AFFICHER Imin
  AFFICHER "Valeur maximale : "
  AFFICHER Imax
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=sqrt(1+x*x)
</td></tr>
</table>