EXERCICE 1 **4 points**

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».
Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.
Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1. « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\ ;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. »

2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0\ ;+\infty[$, g ne s'annulant pas.

$$\text{« Si } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \text{ et si } \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \text{ alors } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1 \text{ ».}$$

3. « Si f est une fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ telle que $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ sur $[0\ ;+\infty[$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ »

4. On considère un repère $(\text{O}\ ;\vec{i}, \vec{j})$ du plan.
« Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(\text{O}\ ;\vec{i}, \vec{j})$. »

5. « La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)\,\text{e}^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)\,\text{e}^x$ ».

6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et – 2.
« Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, – 2 et 1 alors G est le milieu du segment [CI] ».

7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, – 2 et 1.
« L'ensemble des points M du plan tels que $\left\| 3\,\overrightarrow{\text{MA}} - 2\,\overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MC}} \right\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».

8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.
« Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{MA}} \bullet \overrightarrow{\text{MB}}$ est nul si et seulement si M = A ou M = B ».

EXERCICE 2 **3 points**

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.
On note T_I l'évènement : « le premier test est positif ».
On note C l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication. Déterminer les probabilités des évènements T_1, et C.
2. La fabrication d'un écran revient à 1 000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.

Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois. Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client.
On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

a. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.
b. Exprimer l'espérance de X en fonction de a.
c. À partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

EXERCICE 3 **8 points**

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$.

1. Montrer que la fonction $f : t \to (2-t)\,e^t$ est une primitive de $g : t \to (1-t)\,e^t$ sur $[0\,;\,1]$.
En déduire la valeur de u_1.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $u_{n+1} = (n+1)\,u_n - 1$ (R)

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par le deuxième calculatrice
1	7,182 818 284 5 E – 01	7,182 818 284 6 E – 01
2	4,365 636 569 1 E – 01	4,365 636 569 2 E – 01
3	3,096 909 707 5 E – 01	3,096 909 707 6 E – 01
4	2,387 638 830 1 E – 01	2,387 638 830 4 E – 01
5	1,938 194 150 8 E – 01	1,938 194 152 0 E – 01
6	1,629 164 905 1 E – 01	1,629 164 912 0 E – 01
7	1,404 154 335 81 E – 01	1,404 154 384 0 E – 01
8	1,233 234 686 9 E – 01	1,233 235 072 0 E – 01
9	1,099 112 182 8 E – 01	1,099 115 648 0 E – 01
10	9,911 218 282 5 E – 02	9,911 564 800 0 E – 01
11	9,023 401 108 0 E – 02	9,027 212 800 0 E – 02
12	8,280 813 296 3 E – 02	8,326 553 600 0 E – 02
13	7,650 572 852 2 E – 02	8,245 196 800 0 E – 02
14	7,108 019 930 9 E – 02	1,543 275 520 0 E – 01
15	6,620 298 963 6 E – 02	1,314 913 280 06 E + 00
16	5,924 783 418 6 E – 02	2,003 861 248 0 E + 01
17	7,213 181 161 2 E – 03	3,396 564 121 6 E + 02
18	– 8,701 627 390 9 E – 01	6,112 815 418 9 E + 03
19	– 1,753 309 204 2 E + 01	1,161 424 929 6 E + 05
20	– 3,516 618 408 5 E + 02	2,322 848 859 2 E + 06
21	– 7,385 898 658 0 E + 03	4,877 982 504 3 E + 07
22	– 1,624 907 704 7 E + 05	1,073 156 149 9 E + 09
23	– 3,737 288 720 9 E + 06	2,468 259 144 8 E + 10
24	– 8,969 493 030 2 E + 07	5,923 821 947 E + 11
25	– 2,242 372 585 E + 09	1,480 955 486 9 E + 13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$.

2. *a*. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel non nul n $(1-t)^n\,e^t \leq e\,(1-t)^n$

b. En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n) : $u_{n+1} = (n+1)\,u_n - 1$

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par : $v_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = (n+1)\,v_n - 1$.

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)\,(a + 2 - e)$
où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a. (On rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Unité graphique: 0,5cm.

On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.
2. On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.

a. Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.

b. Montrer que $b' = 16\ e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En déduire que O est un point de la droite (BB').

c. On admet que c' = $7 + 7\,i\sqrt{3}$. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

3. On se propose désormais de montrer que la distance MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

a. Calculer la distance OA + OB + OC.

b. Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

c. On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe. On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Déduire des questions précédentes les égalités suivantes : $(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j = a + bj^2 + cj = 22$.

d. On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' $|z + z + z'| \leq |z| + |z'| + |z''|$.

Montrer que MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E)?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme : $(141 + 226k, 68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.
3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

- à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.
- à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p.

b. Montrer que, quelque soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1$ [modulo 227].

c. En utilisant 1. *b*., en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)] = a$. Que peut-on dire de $f[(g(a)] = a$?

CORRECTION

EXERCICE 1 **4 points**

1. Faux

exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$, f est définie et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. Faux

Exemple : $f(x) = -x$ et $g(x) = x^2$ alors $\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

3. Vrai

$0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$ alors $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

4. **Faux**

Exemple : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc alors la droite d'équation $x = 0$ n'est pas asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

5. Vrai

f est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x^2 + 3x + 1)\,e^x + (2x + 3)\,e^x$ donc $f'(x) - f(x) = (2x + 3)\,e^x$
f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - y = (2x + 3)\,e^x$

6. Vrai

Le barycentre G de {(A ; 3) (B ; – 2) (C ; 1)} est aussi le barycentre de {(I ; 1) (C ; 1)} donc le milieu de [IC]

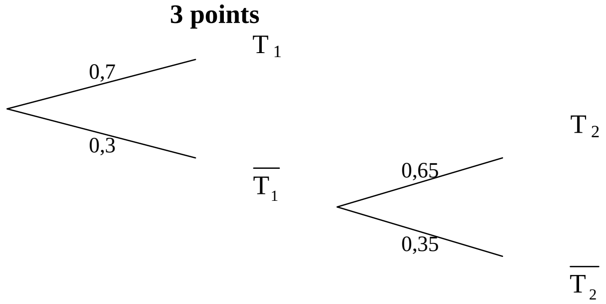
7. Faux

$3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MG} + 3\,\overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MG}$ donc $\left\| 3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 1 \Leftrightarrow 2\,MG = 1$ donc l'ensemble des points M du plan tels que $\left\| 3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{2}$.

8. Faux

$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow$ les deux vecteurs sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ le triangle MAB est rectangle en M $\Leftrightarrow$ M décrit le cercle de diamètre [AB]

EXERCICE 2 **3 points**



1. $p(T_1) = 0{,}7$

$p(C) = p(T_1) + p(T_2 \cap \overline{T_1}) = 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}65$ donc $p(C) = 0{,}895$

2. *a*. X prend les valeurs :

a –1000 (l'appareil est vendu directement) a –1050 (l'appareil est réparé et vendu) – 1050 (l'appareil est réparé mais pas vendu)

k	– 1050	a – 1050	a – 1000
$p(X = k)$	0,105	0,195	0,7

b.

k	– 1050	a – 1050	a – 1000
$p(X = k)$	0,105	0,195	0,7
$k\,p(X = k)$	$-1050 \times 0{,}105$	$(a - 1050) \times 0{,}195$	$(a - 1000) \times 0{,}7$

$E(X) = 0{,}895\,a - 1015$

c. E(X) représente le gain moyen donc l'entreprise peut espérer réaliser des bénéfices si $0{,}895\,a - 1015 \geq 0$

$a \geq \frac{1015}{0{,}895} \Leftrightarrow a \geq 1134{,}08$ €

EXERCICE 3 **8 points**

Partie A

1. f est définie dérivable sur [0 ; 1], $f'(t) = -e^t + (2-t)e^t = (1-t)e^t$.

$f'(t) = g(t)$ donc f est une primitive de g sur [0; 1].

$u_1 = f(1) - f(0) = e - 2$

2. $u'(t) = e^t$ $u(t) = e^t$

$v(t) = (1-t)^{n+1}$ $u(t) = -(n+1)(1-t)^n$

$$u_{n+1} = \left[(1-t)^{n+1} e^t \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n e^t \, dt$$

$$u_{n+1} = 0 - 1 + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$$

$u_{n+1} = (n+1)\, u_n - 1$

Partie B

En examinant les résultats obtenus avec la première calculatrice, (u_n) semble tendre vers $-\infty$.

En examinant les résultats obtenus avec la seconde calculatrice, (u_n) semble tendre vers $+\infty$.

Partie C

1. La fonction exponentielle est définie continue positive sur $\mathbb{R}$

La fonction $t \to (1-t)^n$ est définie continue positive sur [0 ; 1] donc la fonction $t \to (1-t)^n e^t$ est définie continue positive sur [0 ; 1] donc $\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt \geq 0$, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$.

2. *a.* La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout t de [0 ; 1], $e^t \leq e^1$ donc $(1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$

b. Les fonctions définies sur [0 ; 1] : $t \to (1-t)^n e^t$ et $t \to e(1-t)^n$ sont continues sur [0 ; 1]

Pour tout t de [0 ; 1] et pour tout n non nul : $(1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$ donc : $\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e \, dt$

soit $u_n \leq \left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1} e \right]_0^1$, pour tout n non nul, $u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

3. $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

Partie D

1. si $n = 1$: $u_1 + (1\,!)(a + 2 - e) = e - 2 + a + 2 - e = a$ donc $v_1 = u_1 + (1\,!)(a + 2 - e)$

La propriété est vraie pour $n = 1$

Montrons que la propriété est héréditaire, si $v_n = u_n + (n\,!)(a + 2 - e)$ alors $v_{n+1} = u_{n+1} + (n+1)\,!\,(a + 2 - e)$

$v_{n+1} = (n+1)\, v_n - 1$.

$v_{n+1} = (n+1)\, [u_n + (n\,!)(a + 2 - e)] - 1$.

$v_{n+1} = (n+1)\, u_n + (n+1) \times (n\,!)(a + 2 - e) - 1$.

$v_{n+1} = (n+1)\, u_n - 1 + (n+1)\,!\,(a + 2 - e)$ or $u_{n+1} = (n+1)\, u_n - 1$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} + (n+1)\,!\,(a + 2 - e)$

2. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} n\,! = +\infty$ donc il faut connaître le signe de $a + 2 - e$

si $a > e - 2$ alors $a + 2 - e > 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

si $a < e - 2$ alors $a + 2 - e < 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

si $a = e - 2$ alors $v_n = u_n$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

3. l'approximation de l'intégrale calculée pour déterminer u_1 n'est pas la même pour les deux calculatrices.

donc dans le premier cas, $v_1 = u_1 + a + 2 - e$ avec une approximation de $e - 2$ par défaut donc telle que $a < e - 2$ alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

dans le second cas, $v_1 = u_1 + a + 2 - e$ avec une approximation de $e - 2$ par excès donc telle que $a < e - 2$ alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.

2. *a*. $a' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)$

or $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $b = -3 + 3i\sqrt{3}$ et $c = -4 - 4i\sqrt{3}$

donc $a' + 4 + 4i\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + 7i\sqrt{3})$

$a' = -4 - 4i\sqrt{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\sqrt{3}\ i + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{21}{2}$ donc $a' = -4 - 10$ soit $a' = -14$

b. $b' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)$ donc $b' - 8 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-12 - 4i\sqrt{3})$ soit $b' = 8 - i\,8\sqrt{3} = 16\ e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$\overrightarrow{OB'}$ a pour affixe $16\ e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $\overrightarrow{OB}$ a pour affixe $6\ e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6\ e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = 6\ e^{i\pi}\ e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$\overrightarrow{OB}$ a pour affixe $-6\ e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $\overrightarrow{OB'} = -\frac{8}{3}\ \overrightarrow{OB}$ donc O est un point de la droite (BB').

c. $\overrightarrow{OC'}$ a pour affixe $11 + 11i\sqrt{3} = 11(1 + i\sqrt{3})$ soit $22\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 22\ e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\overrightarrow{OC}$ a pour affixe $-4 - i\sqrt{3}\ ) = -4(1 + i\sqrt{3})$ soit $-8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\overrightarrow{OC'} = -\frac{11}{4}\ \overrightarrow{OC}$

O est un point de la droite (CC').

A et A' sont deux points de l'axe des réels donc O $\in$ (AA') donc les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

3. *a*. OA = $|a| = 8$; OB = $|b| = 6$; OC = $|c| = 8$ donc OA + OB + OC = 22

b. $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}\times 3} = e^{2i\pi}$ donc $j^3 = 1$ donc $j^3 - 1 = 0$ or $j^3 - 1 = (j-1)(1 + j + j^2)$

$j \neq 1$ donc $1 + j + j^2 = 0$

on pouvait aussi dire que : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $1 + j + j^2 = 0$

c. $(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j = a + bj^2 + cj - z(1 + j + j^2)$ donc $(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j = a + bj^2 + cj$
$bj^2 = 6j^3 = 6$
$cj = 8j^3 = 8$ donc $a + bj^2 + cj = 8 + 6 + 8 = 22$ donc $(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j = a + bj^2 + cj = 22$.

d. MA = $|z-a| = |a-z|$, puisque $|j| = |j^2| = 1$ on a aussi : MB = $|z-b| = |j^2|\,|b-z| = |j^2(b-z)|$
MC = $|z-c| = |j|\,|c-z| = |j(c-z)|$ donc MA + MB + MC = $|a-z| + |j^2(b-z)| + |j(c-z)|$
or la somme des modules est supérieure au module de la somme donc MA + MB + MC $\geq |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j|$
soit MA + MB + MC ≥ 22
or OA + OB + OC = 22 donc MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

EXERCICE 4 **5 points** **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1\. *a*. $226 = 109 \times 2 + 8$
$109 = 8 \times 13 + 5$
$8 = 5 \times 1 + 3$
$5 = 3 \times 1 + 2$
$3 = 2 \times 1 + 1$
$2 = 2 \times 1$
le dernier reste non nul est 1 donc PGCD (109 ; 226) = 1
donc l'équation (E) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b. $109 \times 141 - 226 \times 68 = 1$ et $109\,x - 226\,y = 1$ donc $109\,(x - 141) - 226\,(y - 68) = 0$
$109\,(x - 141) = 226\,(y - 68)$
109 divise $226\,(y - 68)$ et PGCD (109 ; 226) = 1, donc 109 divise $y - 68$
$y - 68 = 109\,k$ donc $y = 109\,k + 68$ où k appartient à $\mathbb{Z}$.
en remplaçant dans $109\,(x - 141) = 226\,(y - 68)$, on obtient :
$109\,(x - 141) = 226 \times 109\,k \Leftrightarrow x - 141 = 226\,k$
$\Leftrightarrow x = 226\,k + 141$

<u>Vérification :</u>
en remplaçant x par $226\,k + 141$ et y par $109\,k + 68$ dans (E), la relation est vérifiée donc l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme : $(141 + 226\,k, 68 + 109\,k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

$109\,d - 226\,e = 1$ donc d est de la forme $141 + 226\,k$ et e de la forme $68 + 109\,k$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

$0 \leq d \leq 226$ donc $0 \leq 141 + 226\,k \leq 226$ soit $-\dfrac{141}{226} \leq k \leq \dfrac{85}{226}$, k est un entier naturel donc $k = 0$
d est unique et $d = 141$, en remplaçant $e = 68$

2\. 227 est un nombre impair donc peut admettre pour diviseurs les nombres premiers suivants : 3, 5, 7, 11, 13, 17
Aucun de ces nombres est un diviseur de 227
$17^2 > 227$ donc 227 est un nombre premier.

3\. *a*. si $a = 0$, $a^{109} = 0$ donc $f(0) = 0$, $0^{141} = 0$ donc $g(0) = 0$ donc $g\,[f(0)] = 0$

b. A est l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.
227 est un nombre premier donc a n'est pas divisible par 227

227 est un nombre premier et a un entier non divisible par 227 alors $a^{227-1} \equiv 1$ modulo 227.
soit $a^{226} \equiv 1$ modulo 227

c. à tout entier de A, f associe le reste r de la division euclidienne de a^{109} par 227 donc $0 \leq r \leq 226$
à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de r^{141} par 227.