**Pondichéry avril 2010**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

*Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.*

1. La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x + 2y + z - 3 = 0$.

2. Les plans P, P', P'' d'équations respectives : $x - 2y + 3z = 3$, $2x + 3y - 2z = 6$ et $4x - y + 4z = 12$ n'ont pas de point commun.

3. Les droites de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases}$ $u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.

4. On considère les points A, de coordonnées (– 1, 0, 2), B de coordonnées (1, 4, 0), et C, de coordonnées (3, – 4, – 2). Le plan (ABC) a pour équation $x + z = 1$.

5. On considère les points A, de coordonnées (– 1, 1, 3), B, de coordonnées (2, 1, 0), et C, de coordonnées (4, – 1, 5). On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

# CORRECTION

1. Un vecteur directeur de la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}$ est $\vec{u}$ de coordonnées (1 ; – 2 ; 3)

Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; 2 ; 1) or $\vec{u} . \vec{n} = 1 \times 1 + (-2) \times 2 + 3 \times 1 = 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan P dont une équation cartésienne est : $x + 2y + z - 3 = 0$.

Il était possible aussi de chercher le(*s*) point(*s*) d'intersection de D et de P et chercher *t* tel que $(t + 2) + 2(-2t) + (3t - 1) = 0$
ceci est équivalent à 1 = 0 ce qui est impossible donc D et P n'ont pas de point commun, D est strictement parallèle à P. **VRAI**

2. Pour chercher les points communs à ces trois plans il faut résoudre le système : $\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \\ 4x - y + 4z = 12 \end{cases}$

LA somme des trois lignes et la différence de la troisième et de la première conduisent au système : $\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 7x \quad + 5z = 21 \\ 7x \quad + 5z = 21 \end{cases}$ soit

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 7x \quad + 5z = 21 \end{cases}$. L'intersection de deux plans est une droite donc **FAUX.**

3. Pour déterminer l'éventuel point d'intersection des droites citées, il faut chercher des réels *t* et *u* tels que $\begin{cases} x = 2 - 3t = 7 + 2u \\ z = -3 + 2t = -6 - u \\ y = 1 + t = 2 + 2u \end{cases}$ donc résoudre le système $\begin{cases} 3t + 2u = -5 \\ 2t + u = -3 \\ t - 2u = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2t + u = -3 \\ t - 2u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t = -5 \\ t - 2u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ u = -1 \end{cases}$ dans ce cas $3t + 2u = -5$ donc les deux droites sont sécantes et leur point d'intersection est A (5 ; – 5 ; 0). **VRAI**

4. On considère les points A, de coordonnées (– 1, 0, 2), B de coordonnées (1, 4, 0), et C, de coordonnées (3, – 4, – 2). Le plan (ABC) a pour équation $x + z = 1$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (2 ; 4 ; – 2) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (4 ; – 4 ; – 4)
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc le plan (ABC) existe.
Les coordonnées de A, B et C vérifient $x + z = 1$ donc le plan (ABC) a pour équation $x + z = 1$ donc **VRAI.**

5. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (3 ; 0 ; – 3) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (5 ; – 2 ; 2)
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc C n'appartient pas à la droite (AB).
On ne peut pas écrire C comme barycentre des points A et B donc **FAUX.**