Nouvelle-Calédonie novembre 2009

L'espace est rapporté au repère orthonormal (A ; AB , AD , AE).

On considère le cube ABCDEFGH représenté sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

2. Démontrer que le vecteur n (2 ; 1 ; 1) est orthogonal à IK et à IJ .
En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

3. *a*. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

b. En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}\,;1\,;0\right)$.

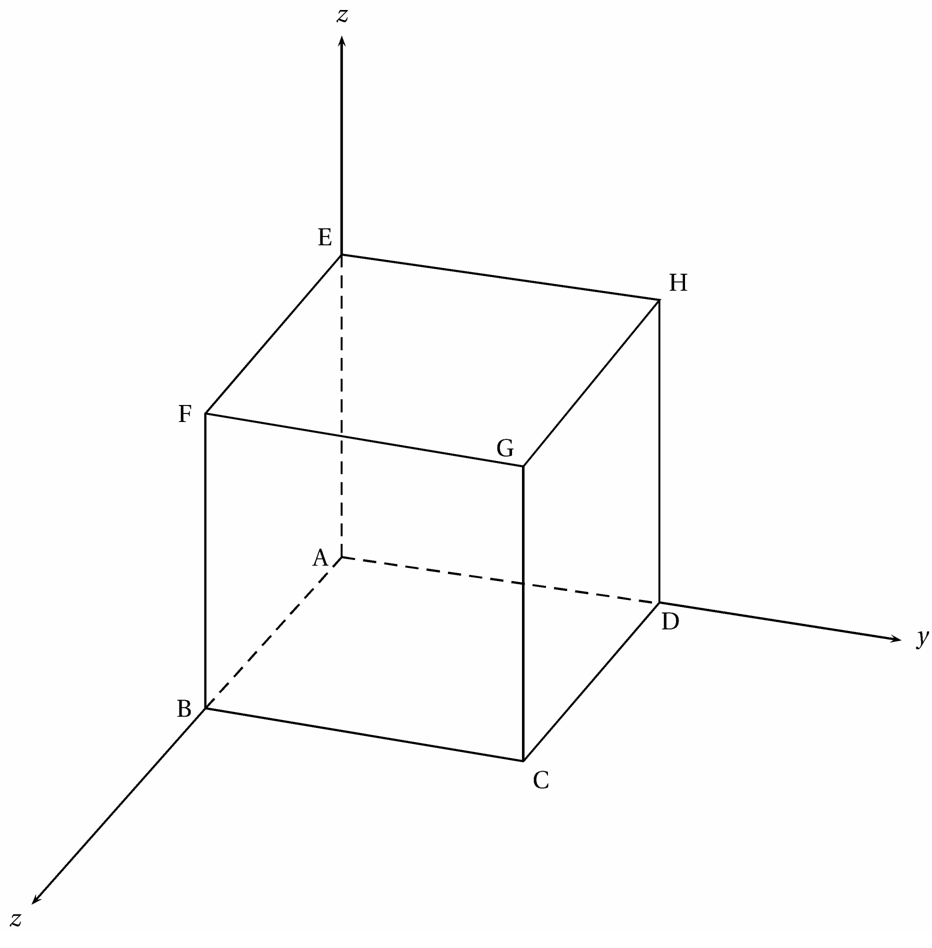
c. Placer le point R sur la figure.

4. Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.

5. *a*. Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

b. Soit S la sphère de centre G passant par F. Justifier que la sphère S et le plan (IJK) sont sécants. Déterminer le rayon de leur intersection.

ANNEXE



CORRECTION

1. B a pour coordonnées (1 ; 0 ; 0) et C (1 ; 1 ; 0) donc I a pour coordonnées $\left(1\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$

B a pour coordonnées (1 ; 0 ; 0) et F (1 ; 0 ; 1) donc J a pour coordonnées $\left(1\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$

H a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1) et F (1 ; 0 ; 1) donc K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$

2. IK a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$ donc $n\,.\,\text{IK} = -\frac{1}{2}\times 2 + 0\times 1 + 1\times 1 = 0$

IJ a pour coordonnées $\left(0\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ donc $n\,.\,\text{IJ} = 0\times 2 - \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 1 = 0$ donc le vecteur n (2 ; 1 ; 1) est orthogonal à IK et à IJ .

Les droites (IJ) et (IK) sont sécantes donc n est un vecteur normal du plan (IJK) donc le plan (IJK) *a* une équation de la forme : $2x + y + z + d = 0$; I appartient à ce plan donc $2 \times 1 + \frac{1}{2} + 0 + d = 0$ soit $d = -\frac{5}{2}$

Une équation du plan (IJK) est : $2x + y + z + -\frac{5}{2} = 0$ ou encore $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

3\. *a*. CD = – AB donc AB est un vecteur directeur de (CD). M ∈ (CD) si et seulement si il existe un réel k tel que CM = k AB

soit $\begin{cases} x-1=k \\ y-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ donc un système d'équations paramétriques de la droite (CD) est $\begin{cases} x=k+1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$.

b. En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}; 1; 0\right)$.

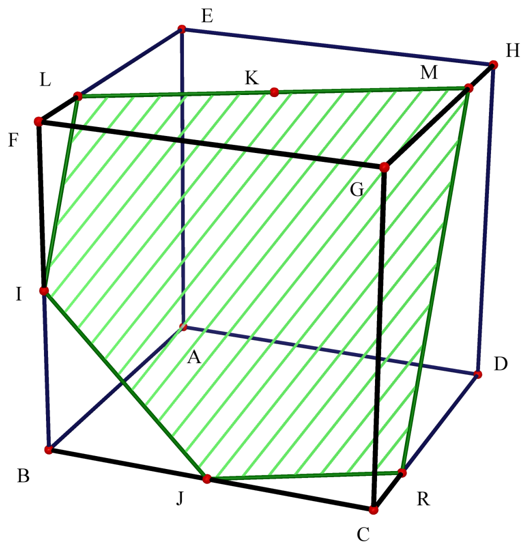
R appartient à (CD) donc les coordonnées de R sont de la forme $\begin{cases} x=k+1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$ avec k réel.

R appartient au plan (IJK) donc les coordonnées de R vérifient $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

donc $4(k + 1) + 2 \times 1 + 2 \times 0 - 5 = 0$ donc $k = -\frac{1}{4}$

les coordonnées de R sont $\begin{cases} x=-\frac{1}{4}+1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

donc R est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}; 1; 0\right)$.



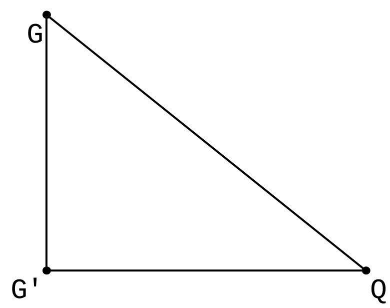
4\. I appartient à (BC) et J appartient à (BF) donc le plan (IJK) coupe la face (BCFG) du cube suivant la droite (IJ)
J appartient à (BF) et R appartient à (CD) donc le plan (IJK) coupe la face (ABCD) du cube suivant la droite (JR)
Les faces (ABCD) et (EFGH) du cube sont parallèles donc le plan (IJK) les coupe suivant deux droites parallèles donc coupe (EFGH) suivant la parallèle en K à (JR).
Soit M le point d'intersection de cette droite avec (GH) et L le point d'intersection de cette droite avec (EF)
Le plan (IJK) coupe la face ((ABEF) suivant (IL) et la face (CDHG) suivant (MR) d'où la section du cube par ce plan.

5\. *a*. G est le point de coordonnées (1 ; 1 ; 1) donc la distance du point G au plan (IJK) est égale à $\frac{|4\times1+2\times1+2\times1-5|}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}}$

$\frac{|4\times1+2\times1+2\times1-5|}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\times6} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ la distance du point G au plan (IJK) est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

b. S est la sphère de centre G passant par F donc de rayon GF = 1.

$\frac{\sqrt{6}}{4} < 1$ donc la sphère S et le plan (IJK) sont sécants suivant un cercle de centre G' projection orthogonale de G sur le plan (IJK).
Soit Q un point de ce cercle. G'Q est le rayon R du cercle intersection de la sphère et du plan (IJK).
Le triangle GG'Q est un triangle rectangle en G'



donc $GG'^2 + G'Q^2 = GQ^2$ or $GG' = \frac{\sqrt{6}}{4}$ et GQ = 1 (rayon de la sphère)

donc $G'Q^2 = 1 - \frac{6}{16} = \frac{10}{16}$ donc $G'Q = \frac{\sqrt{10}}{4}$ donc $R = \frac{\sqrt{10}}{4}$