Pondichéry avril 2016

On souhaite stériliser une boite de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25°$ C et on la place dans un four à température constante $T_1 = 100°$C.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boite est supérieure à 85°C. Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T, la température en degré Celsius de la boite au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T. est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

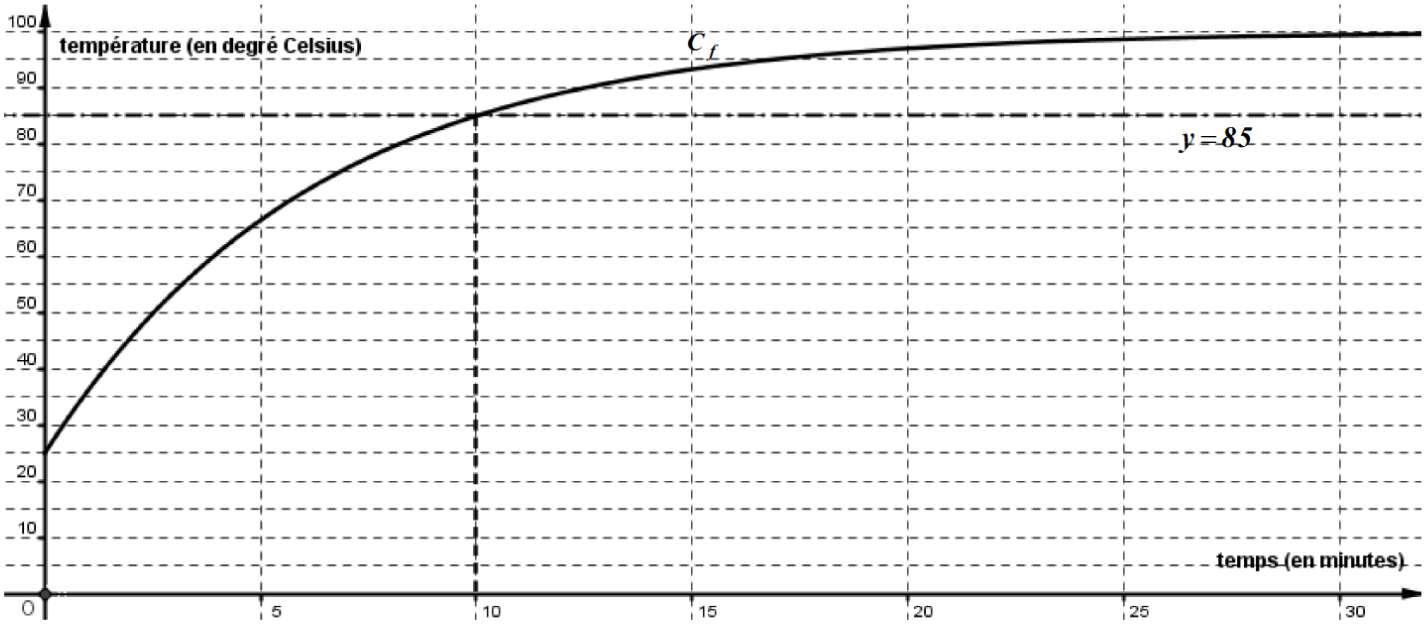
Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de t à n faire T prend la valeur 0,85 × T + 15 Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boite de conserve au bout de 3 minutes. Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n. on a $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boite est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec : $f(t) = 100 - 75\ e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$.

1. *a*. Étudier le sens de variations de f sur [0 ;+ ∞ [.
b. Justifier que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$.
2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.
On note A(θ) le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = 0$. $y = 85$ et la courbe représentative C_f de f.
On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ si l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine A(θ) est supérieure à 80.



a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe que l'on a A(25) > 80.
b. Justifier que, pour θ > 10, on a $A(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt$.
c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

CORRECTION

Partie A : Modélisation discrète

1. Au bout de 3 minutes, la température de la boite de conserve est de 54 minutes.

n	0	1	2	3
T	25	36,25	45,81	53,94

2. **Initialisation :** $T_0 = 25$ or $100 - 75 \times 0{,}85^0 = 100 - 75 = 25$ donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$
Hérédité : Montrons que, pour tout entier naturel n, si on a $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$ alors $T_{n+1} = 100 - 75 \times 0{,}85^{n+1}$.
$T_{n+1} = 0{,}85\ T_n + 15 = 0{,}85 \times (100 - 75 \times 0{,}85^n) + 15$
$T_{n+1} = 85 - 75 \times 0{,}85^n \times 0{,}85 + 15$ donc $T_{n+1} = 100 - 75 \times 0{,}85^{n+1}$ donc la propriété est héréditaire.
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$

3. $T_n > 85 \Leftrightarrow 100 - 75 \times 0{,}85^n > 85 \Leftrightarrow 15 > 75 \times 0{,}85^n \Leftrightarrow \dfrac{15}{75} > 0{,}85^n \Leftrightarrow 0{,}2 > 0{,}85^n \Leftrightarrow \ln 0{,}2 > n \ln 0{,}85$

$\ln 0{,}85 < 0$ donc $T_n > 85 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}85}$ or $\dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}85} \approx 9{,}9$ il faut donc attendre 10 minutes pour que la stérilisation débute.

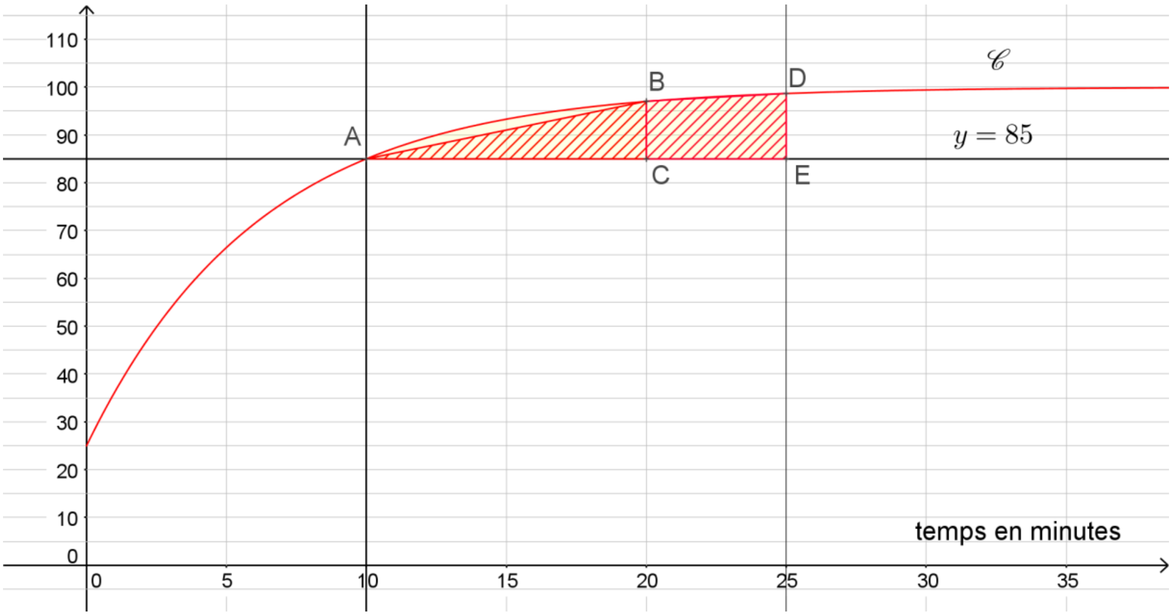
Partie B : Modélisation continue

1. *a.* $f'(t) = -75 \times \dfrac{-\ln 5}{10} e^{-\frac{\ln t}{10}} \Leftrightarrow f'(t) = 7{,}5 \ln 5\ e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$

La fonction exponentielle est positive sur R donc $f'(t) > 0$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$, f est croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

b. f est croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$ donc si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq f(10)$ or $f(10) = 85$ donc si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$.

2.



A(25) est supérieure à la somme des aires du triangle ABC, et du trapèze BCDE.
L'aire du triangle ABC est égale à $10 \times (f(20 - 85) = 60$
L'aire du trapèze BCDE est égale à $\dfrac{BC + DE}{2} \times 5 = \dfrac{f(10) - 85 + f(20) - 85}{2} \times 5 \approx 64{,}1$ donc $A(25) > 60 + 64$ donc $A(25) > 80$.

b. pour $\theta > 10$, $f(\theta) > 85$ donc $A(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} (f(\theta) - 85)\, dt = \int_{10}^{\theta} \left(100 - 75\, e^{-\frac{\ln 5}{10}t} - 85\right) dt$

$A(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} \left(15 - 75\, e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) dt = \int_{10}^{\theta} 15\, dt - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\, dt$

$A(\theta) = 15\,(\theta - 10) - 75 \displaystyle\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\, dt$.

c. $A(\theta) = 15\,(\theta - 10) - 75 \left[-\dfrac{10}{\ln 5} e^{-\frac{\ln 5}{10}t} \right]_{10}^{\theta}$

$A(20) = 15\,(20 - 10) - 75 \left[-\dfrac{10}{\ln 5} e^{-\frac{\ln 5}{10}t} \right]_{10}^{20}$ donc $A(20) = 150 - 75 \left[-\dfrac{10}{\ln 5} e^{-2\ln 5} + \dfrac{10}{\ln 5} e^{-\ln 5} \right]_{10}^{20}$

$A(20) = 150 - \dfrac{75}{\ln 5}\left(-\dfrac{10}{25} + \dfrac{10}{5}\right) = 150 - \dfrac{120}{\ln 5}$

$A(20) \approx 75{,}44$ donc $A(20) < 80$.
La stérilisation n'est pas finie au bout de 20 minutes