On pose pour tout entier naturel non nul n : $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}$ et $v_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...\frac{1}{n^2}$

1. Montrer que les suites u et v sont croissantes.
2. A l'aide d'un tableur, émettre une conjecture sur la convergence des suites u et v.

3. *a*. Démontrer que pour tout entier n non nul : $u_{2n} \geq u_n + \frac{1}{2}$.

b. Démontrer par récurrence sur l'entier k non nul la propriété P(k) : il existe au moins un entier n_k tel que : $u_{n_k} \geq k$. En déduire que la suite u est divergente.

4. *a*. Démonter par récurrence que : pour tout entier n non nul, $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

b. En déduire que la suite v est convergente.

CORRECTION

1. Pour tout entier n non nul, $u_{n+1} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$ donc $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$

$n \in$N* donc $\frac{1}{n+1} > 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$

La suite u est croissante.

Pour tout entier n non nul, $v_{n+1} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$ donc $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{(n+1)^2}$

$n \in$N* donc $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc $v_{n+1} \geq v_n$

La suite v est croissante.

2.

n	u_n	v_n
1	1	1
2	1,5	1,25
3	1,833	1,361
4	2,083	1,424
5	2,283	1,464
10	2,929	1,550
20	3,598	1,596
30	3,995	1,612
40	4,279	1,620
50	4,499	1,625
60	4,680	1,628
80	4,965	1,633
100	5,187	1,635
150	5,591	1,638
200	5,878	1,640
300	6,283	1,642

La suite u ne semble pas converger, la suite v semble converger vers un nombre voisin de 1,642.

3. *a*. $u_{2n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n} = u_n + \frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}$

Pour tout entier naturel non nul k, si $k \leq 2\,n$ alors $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ donc $\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}$, entre n + 1 et 2 n il y a n termes donc $\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n}$ donc $\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$ donc pour tout entier n non nul : $u_{2n} \geq u_n + \frac{1}{2}$.

b. **Initialisation :**

si k = 1, $u_1 = 1$ donc $u_1 \geq 1$, il existe donc au moins un entier n_1 ($n_1 = 1$) tel que : $u_{n_1} \geq 1$. La propriété est initialisée pour n = 1.

Hérédité :

Montrons que s'il existe au moins un entier n_k tel que : $u_{n_k} \geq k$ alors il existe au moins un entier n_{k+1} tel que : $u_{n_{k+1}} \geq k + 1$.

Il existe au moins un entier n_k tel que : $u_{n_k} \geq k$, or pour tout entier n non nul : $u_{2n} \geq u_n + \frac{1}{2}$ donc en particulier : $u_{2n_k} \geq u_{n_k} + \frac{1}{2}$

donc $u_{2n_k} \geq k + \frac{1}{2}$

de même $u_{4n_k} \geq u_{2n_k} + \frac{1}{2}$ donc $u_{4n_k} \geq k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ donc $u_{4n_k} \geq k + 1$

Il existe donc au moins un entier n_{k+1} ($n_{k+1} = 4\,n_k$) tel que : $u_{n_{k+1}} \geq k + 1$.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier k non nul, il existe au moins un entier n_k tel que : $u_{n_k} \geq k$.

Soit A un réel strictement positif, il existe un entier k non nul, tel que $k \geq$ A et il existe au moins un entier n_k tel que : $u_{n_k} \geq k$ donc $u_{n_k} \geq$ A

La suite u est croissante donc pour tout entier n, $n \geq n_k$, $u_n \geq u_{n_k} \geq$ A.

La suite u est divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

4. *a*. **Initialisation :** si $n = 1$, $v_1 = 1$ donc $v_1 \leq 2 - \frac{1}{1}$. La propriété est initialisée pour $n = 1$.

Hérédité : montrons que si $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$, alors $v_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.

$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ donc $v_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$

$v_{n+1} \leq 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2}$ soit $v_{n+1} \leq 2 - \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$

pour tout entier n non nul, $n^2 + n + 1 \geq 1$ donc $\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$ donc $-\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{(n+1)^2}$

soit $2 - \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{(n+1)^2}$ donc $v_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier n non nul, $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

b. Pour tout entier n non nul, $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ donc $v_n \leq 2$

La suite v est croissante, majorée par 2 donc converge vers une limite ℓ et $\ell \leq 2$