**Amérique du Nord juin 2016**

**EXERCICE 1 (6 points) Commun à tous les candidats**

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

**Partie A**

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un Jour donné. On définit les événements suivants :

A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;

D « la bille a été fabriquée par la machine B » ;

V : « la bille est vendable ».

**1.** Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

**2.** Justifier que $P(B \cap V) = 0.372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

**3.** Un technicien affirme que 70% des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?

**Partie B**

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

**1.** Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B pu une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}055$.

Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la **partie A**, au centième près.

**2.** De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = l$ et d'écart-type $\sigma'$, $\sigma'$ étant un réel strictement positif ;

Sachant que $P(0{,}9 \leq Y \leq 1{,}1) = 0{,}98$, déterminer une valeur approchée au millième de $\sigma'$.

**Partie C**

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, Jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

**1.** Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

**a.** On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à $10^{-3}$.

**b.** Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

**2.** Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99%, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

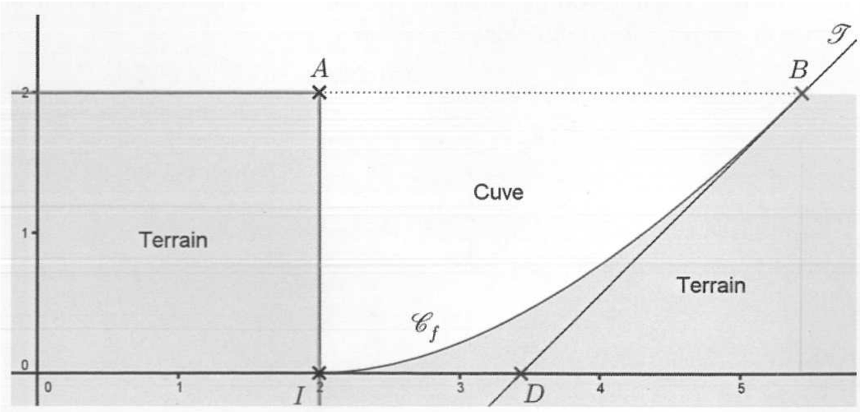
**EXERCICE 2 (6 points) Commun à tous les candidats**

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.

Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant ;

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

Cette cuve est schématisée ci-contre.




La partie incurvée est modélisée par la courbe V ; de la fonction *f* sur l'intervalle [2 ; 2 e] définie par :

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 met constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points $A(2 ; 2)$, $I(2 ; 0)$ et $B(2e ; 2)$.

**Partie A**

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

**1.** Justifier que les points *B* et *I* appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point I.

**2.** On note *T* la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point *B*, et *D* le point d'intersection de la droite *T* avec l'axe des abscisses.

**a.** Déterminer une équation de la droite *T* et en déduire les coordonnées de *D*.

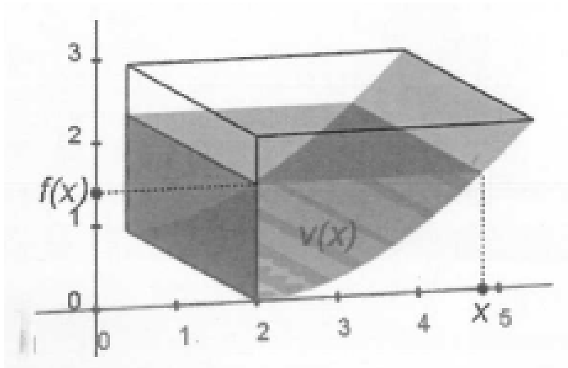
**b.** On appelle *S* l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites d'équations y = 2, x = 2 et x = 2 e.

$S$ peut être encadrée par l'aire du triangle $ABI$ et celle du trapèze $AIDB$.
Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

**3. a.** Montrer que, sur l'intervalle [2 ; 2 e], la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

**b.** En déduire une primitive $F$ de la fonction $f$ sur l'intervalle [2 ; 2 e].

**c.** Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au $m^3$ près.




**Partie B**

Pour tout réel x compris entre 2 et 2 e, on note v(x) le volume d'eau, exprimé en $m^3$, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à f(x).

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle [2 ; 2 e], $v(x) = 5\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right)$.

**1.** Quel volume d'eau, au $m^3$ près, y a t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

**2.** On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et $v$ la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre. Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

| | |
|---|---|
| **Variables :** | a est un réel<br>b est un réel |
| **Traitement :** | a prend la valeur 2<br>b prend la valeur 2e<br>Tant que u(b) – v(a) > $10^{-3}$ faire :<br>│ c prend la valeur (a + b)/2<br>│ Si v(c) < V/2, alors :<br>│ │ a prend la valeur c<br>│ Sinon<br>│ │ b prend la valeur c<br>│ Fin Si<br>Fin Tant que |
| **Sortie :** | Afficher f(c) |

**EXERCICE 3 (3 points) Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

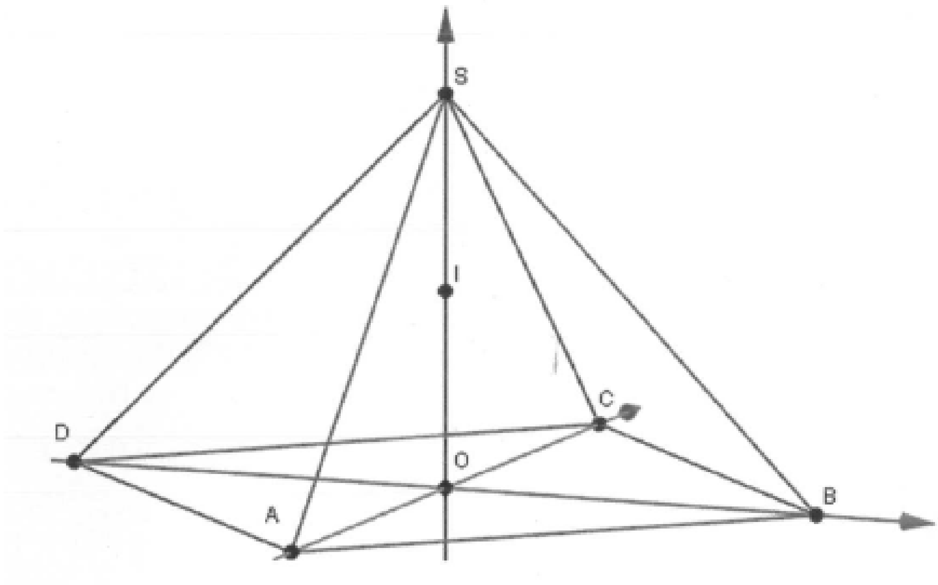
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4 i et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle $M_n$ le point d'affixe $z_n = (1 + i)^n$.

**1.** Écrire le nombre 1 + i sous forme exponentielle.

**2.** Montrer qu'il existe un entier naturel $n_0$, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, le point $M_n$ est à l'extérieur du carré ABCD.

**EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la pyramide régulière *SABCD* de sommet *S* constituée de la base carrée *ABCD* et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.




Le point *O* est le centre de la base *ABCD* avec *OB* = 1.

On rappelle que le segment (SOI est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

**1.** Justifier que le repère $(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$.

**2.** On définit le point *K* par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note *I* le milieu du segment [*SO*].

**a.** Déterminer les coordonnées du point *K*.

**b.** En déduire que les points *B*, *I* et *K* sont alignés

**c.** On note *L* le point d'intersection de l'arête [*SA*] avec le plan (*BCI*).

Justifier que les droites (*AD*) et (*KL*) sont parallèles

**d.** Déterminer les coordonnées du point *L*.

**3.** On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$.

**a.** Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (*BCI*).

**b.** Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

**c.** Quelle est la position relative des plans (*DCI*) et (*SAD*) ?

**EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.

On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du *n*-ième tirage.

**1. *a.*** Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1),\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \text{ et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$$

***b.*** Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

**2.** Pour tout entier naturel *n* non nul, on note $R_n$ la matrice ligne définie par :

$$R_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On note $R_0$ la matrice ligne (0 0 1).

On admettra par la suite que, pour tout entier naturel *n*, $R_{n+1} = R_n \times M$.

Déterminer $R_1$ et justifier que, pour tout entier naturel *n*, $R_n = R_0 \times M^n$.

**3.** Il y a une erreur dans l'écriture de D, il faut lire D = $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et non D = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec : $P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Établir que, pour tout entier naturel *n*, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$

On admettra que, pour tout entier naturel *n*, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**4. *a.*** Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de *n*.

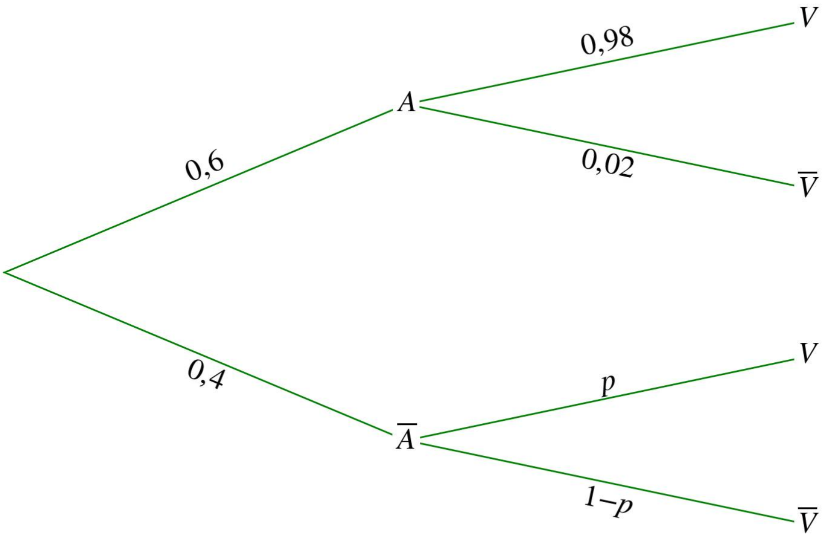
***b.*** Sachant que $R_0 P = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$, déterminer les coefficients de $R_n$ en fonction de *n*.

**5.** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2)$.

Interpréter ces résultats.

**CORRECTION**

**EXERCICE 1 (6 points) Commun à tous les candidats**
**Partie A**




**1.** $p(A \cap V) = 0,6 \times 0,98 = 0,588$

**2.** $p(V) = p(A \cap V) + p(B \cap V) = 0,96$ donc $p(B \cap V) = 0,96 - 0,588$ soit $p(B \cap V) = 0.372$

$p(B \cap V) = p(B) \times p_B(V)$ donc $p_B(V) = \dfrac{0,4}{1 - p(A)} = \dfrac{0,372}{0,4} = 0,93$

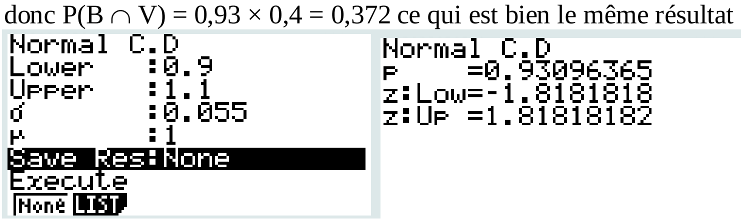
**3.** $p(\overline{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0,96 = 0,04$

$p(\overline{V} \cap B) = p(B) - p(V \cap B) = 0,4 - 0,372 = 0,028$

$p_{\overline{V}}(B) = \dfrac{p(\overline{V} \cap B)}{p(\overline{V})} = \dfrac{0,028}{0,04} = 0,7$. Le technicien qui affirme que 70% des billes non vendables proviennent de la machine B *a* raison.

**Partie B**

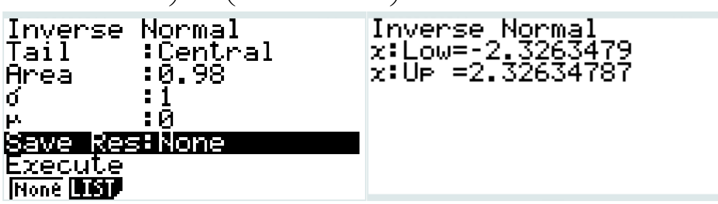
**1.** $p(0,9 \le X \le 1,1) = 0,93$ donc $P(B \cap V) = 0,93 \times 0,4 = 0,372$ ce qui est bien le même résultat qu'à la question a 2.




**2.** De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma'$, $\sigma'$ étant un réel strictement positif ;

Soit $T = \dfrac{Y - 1}{\sigma'}$, T suit une loi normale centrée réduite

$P(0,9 \le Y \le 1,1) = 0,98 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{0,9 - 1}{\sigma'} \le T \le \dfrac{1,1 - 1}{\sigma'}\right) = P\left(\dfrac{0,1}{\sigma'} \le T \le \dfrac{-0,1}{\sigma'}\right) = 0,98$




donc $\dfrac{0,1}{\sigma'} = 2,233$ soit $\sigma' = \dfrac{0,1}{2,33} \approx 0,043$

**Partie C**

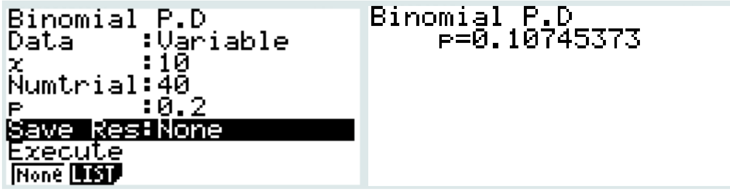
**1.** La machine teinte les billes de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge (il y a donc 5 couleurs possibles) donc la probabilité qu'une bille soit noire est 1/5 soit 0,2.

On a une succession de 40 expériences aléatoires indépendantes, chacune d'elle *a* deux issues :

- réussite : la bille est noire ($p = 0,2$)
- échec : la bille n'est pas noire ($q = 1 - p = 0,8$)

donc la variable aléatoire Z égale au nombre de billes noires obtenues, suit une loi binomiale de paramètres (40 ; 1/5)

***a.*** P(Z = 10) = 0,107




***b.*** $n = 40$, $p = 0,2$ donc $n\,p = 8$ donc $n\,p > 5$, $n\,(1 - p) = 32$ donc $n\,(1 - p) > 5$. Les conditions sont réunies pour utiliser un intervalle de fluctuation au risque 5 %

$$\mathrm{I}_{40} = \left[\, 0,2 - 1,96\sqrt{\frac{0,2\times 0,8}{40}}\,;\, 0,2 + 1,96\sqrt{\frac{0,2\times 0,8}{40}}\,\right]$$ soit $\mathrm{I}_{40} = [0,076 \,;\, 0,324]$.

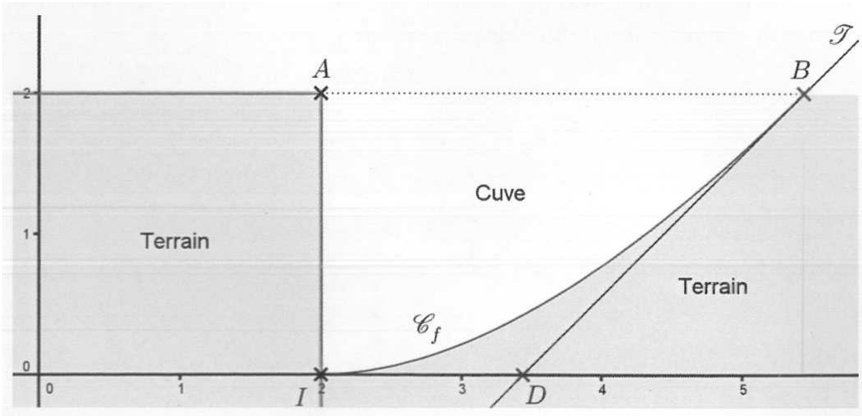
La fréquence du nombre de boules noires dans l'échantillon est $f = \frac{12}{40} = 0,3$, $f \in \mathrm{I}_{40}$ donc la machine qui teinte les billes est bien réglée.

**2.** « obtenir au moins une bille noire » est l'événement contraire de « ne pas obtenir de bille noire » donc $P = 1 - 0,8^n$

$1 - 0,8^n \geq 0,99$ donc $0,8^n \leq 1 - 0,99$ soit $n \ln 0,8 \leq \ln 0,01$ donc $n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$ donc $n \geq 27$

Le nombre minimal de billes que chaque sachet doit contenir pour atteindre cet objectif est de 27.

**EXERCICE 2 (6 points) Commun à tous les candidats**




**Partie A**

**1.** $f(2\,e) = 2\,e \ln e - 2\,e + 2$ or $\ln e = 1$ donc $f(2\,e) = 2$ donc $B \in \mathcal{C}_f$

$f(2) = 2 \ln 1 - 2 + 2$ or $\ln 1 = 0$ donc $f(2) = 0$ donc $I \in \mathcal{C}_f$

Soit $\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2 & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$f'(2) = 0$ donc la tangente en I à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses et passe par I, or I est un point de l'axe des abscisses donc l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point I.

**2. *a.*** Une équation de la droite $T$ est $y = f'(2\,e)\,(x - 2\,e) + 2$ or $f'(2\,e) = 1$

Une équation de la droite $T$ est $y = x - 2\,e + 2$

$y_D = 0$ donc $0 = x_D - 2\,e + 2$ donc $x_D = 2\,e - 2$

***b.*** L'aire du triangle $ABI$ est égale à $\frac{1}{2} AB \times AI = \frac{1}{2}(x_B - x_A) \times y_A = \frac{1}{2}(2\,e - 2) \times 2 = 2\,e - 2$

L'aire du trapèze $AIDB$ est égale à $\frac{1}{2}(ID + AB) \times \mathrm{AI} = \frac{1}{2}(2\,e - 2 - 2 + 2\,e - 2) \times 2$ soit $4\,e - 6$

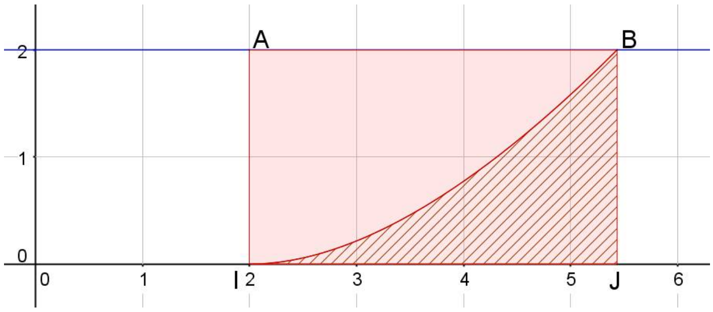
$2\,e - 2 \leq S \leq 4\,e - 6$ soit approximativement entre 3,436 et 4,874

**3. *a.*** Montrer que, sur l'intervalle [2 ; 2 e], la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$

est une primitive de ta fonction $g$ définie par $g(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

oit $\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2 & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} & v'(x) = x \end{cases}$ donc $G'(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{2x}{4}$ donc $G'(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) = g(x)$ donc $G$ est une primitive de la fonction $g$

***b.*** Une primitive $F$ de la fonction $f$ sur l'intervalle [2 ; 2 e] est $F(x) = G(x) - \frac{x^2}{2} + 2x = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x$




***c.*** $\int_2^{2e} f(x)\,\mathrm{d}x$ = F(2 e) – F(2) est l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x$ = 2 et $x$ = 2 e et la courbe $\mathbf{C}_f$

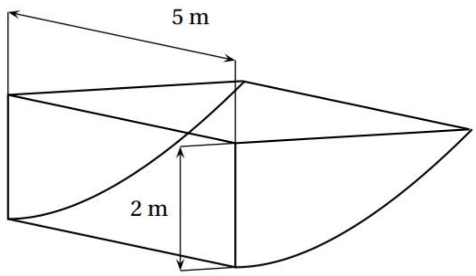
F(2 e) = 2 e$^2$ ln e – 3 e$^2$ + 4 e = 2 e$^2$ – 3 e$^2$ + 4 e donc F(2 e) = 4 e – e$^2$

F(1) = 2 ln 1 – 3 + 4 = 1 donc $\int_2^{2e} f(x)\,\mathrm{d}x$ = 4 e – e$^2$ – 1

S est l'aire du carré AIJB – l'aire calculée précédemment

soit S = (2 e – 2) × 2 – (4 e – e$^2$ – 1) donc S = e$^2$ – 3.

V = S × 5 = 5 e$^2$ – 15 unités de volume soit 21,95 $m^3$ soit 22 $m^3$ à l'unité près.




**Partie B**

**1.** D'après la question a.1. pour tout $x \in [2 ; 2\,e]$ ; $f'(x) = \ln\frac{x}{2}$

Or $2 \leq x \leq 2\,e \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{2} \leq e \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln\frac{x}{2} \leq \ln e \Leftrightarrow 0 \leq f'(x) \leq 1$

$f'$ est strictement positive sur ] 2 ; 2 e ] et la fonction $f$ strictement croissante sur cet intervalle.

la fonction $f$ est continue strictement croissante sur l'intervalle [2 ; 2 e ] ; $f(2) = 0$ et $f(2\,e) = 2$ donc l'image par $f$ de l'intervalle [2 ; 2 e ] est [0 ; 2]

$1 \in [0 ; 2]$ donc, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α sur l'intervalle [2 ; 2 e ].

$f(4{,}31) \approx 0{,}999 < 1$ et $f(4{,}32) \approx 1{,}0069 > 1$, donc $4{,}31 < \alpha < 4{,}32$.
Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\alpha \approx 4{,}32$ alors $v(\alpha) \approx 7{,}528\ m^3$ soit 8 $m^3$ au $m^3$ près.

**2.** Cet algorithme permet par approximations successives de déterminer la hauteur d'eau dans la cuve lorsqu'elle est à moitié pleine.

**EXERCICE 3 (3 points) Commun à tous les candidats**

**1.** $|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$ donc $\arg(1 + \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}$ et $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

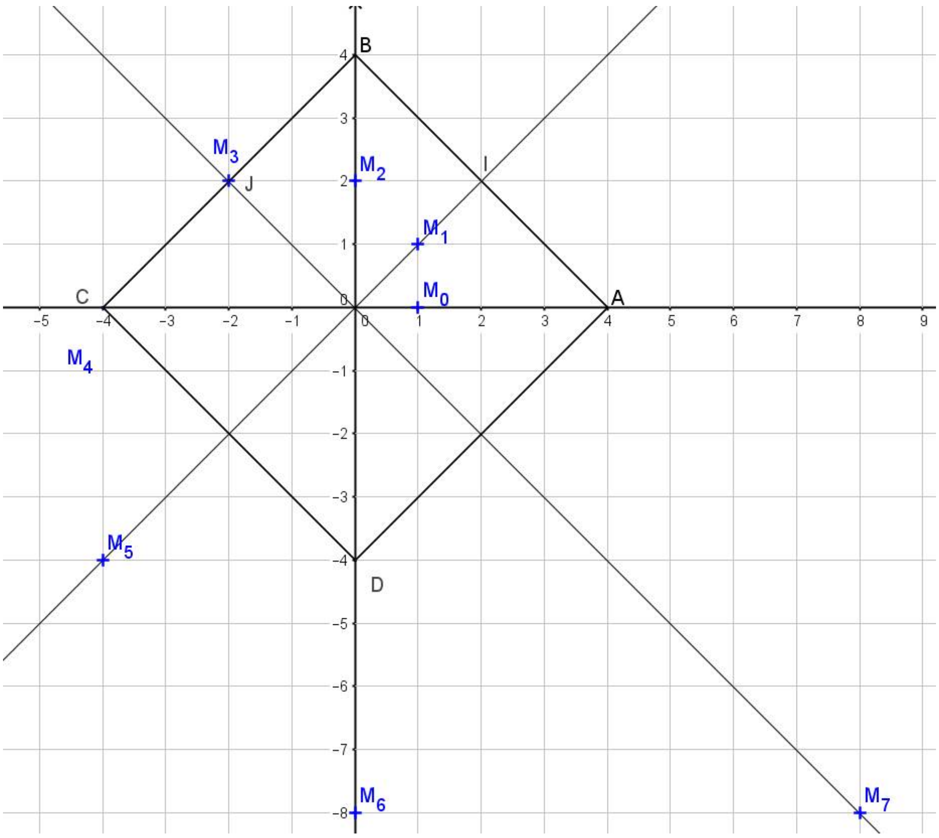
**2.** $z_n = \sqrt{2}^{\,n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\frac{\pi}{4}}$, tout nombre entier s'écrit $n = 4k + r$ avec $0 \le r \le 3$ donc $z_n = \sqrt{2}^{\,n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\pi + \frac{r\pi}{4}\right)}$

si $n = 4k$, $z_n = \sqrt{2}^{\,n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}$, le point $\mathrm{M}_n$ appartient à l'axe des abscisses donc est à l'extérieur du carré si $\mathrm{OM}_n \ge 4$ soit $\sqrt{2}^{\,n} \ge 4$ soit $n \ge 4$
Le milieu de [AB] est le point I d'affixe 2 + 2 i donc $\mathrm{OI} = |2 + 2\mathrm{i}| = 2\sqrt{2}$

si $n = 4k + 1$, $z_n = \sqrt{2}^{\,n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right)}$, le point $\mathrm{M}_n$ appartient à la droite d'équation $y = x$ donc est à l'extérieur du carré si $\mathrm{OM}_n \ge 2\sqrt{2}$ soit $\sqrt{2}^{\,n} \ge 2$ soit $n \ge 3$

si $n = 4k + 2$, $\sqrt{2}^{\,n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$, le point $\mathrm{M}_n$ appartient à l'axe des ordonnées donc est à l'extérieur du carré si $\mathrm{OM}_n \ge 4$ soit $\sqrt{2}^{\,n} \ge 4$ soit $n \ge 4$
Le milieu de [BC] est le point J d'affixe – 2 + 2 i donc $\mathrm{OJ} = |-2 + 2\mathrm{i}| = 2\sqrt{2}$

si $n = 4k + 3$, $\sqrt{2}^{\,n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\pi + \frac{3\pi}{4}\right)}$, le point $\mathrm{M}_n$ appartient à d'équation $y = -x$ donc est à l'extérieur du carré si $\mathrm{OM}_n \ge 2\sqrt{2}$ soit $\sqrt{2}^{\,n} \ge 2$ soit $n \ge 3$
Dans tous les cas si $n \ge 4$, pour tout entier $n \ge 4$, le point $\mathrm{M}_n$ est à l'extérieur du carré ABCD donc $n_0 = 4$.




Autre méthode,

**EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**1.** (OB) et (OC) sont deux demi-diagonales du carré *ABCD* donc $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux et OB = OD = 1

(SO) est la hauteur de la pyramide donc (SO) est perpendiculaire au plan (*ABC*) donc à toute droite de ce plan donc $\overrightarrow{OS}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

OB = 1 et OA = 1 et le triangle OAB est rectangle en O donc $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 2$ donc $AB = \sqrt{2}$.

Le triangle OSA est rectangle en O donc $OS^2 + OA^2 = AS^2$

Toutes les arêtes ont la même longueur donc $AS = \sqrt{2}$ donc $OS^2 + 1 = 2$ soit OS = 1

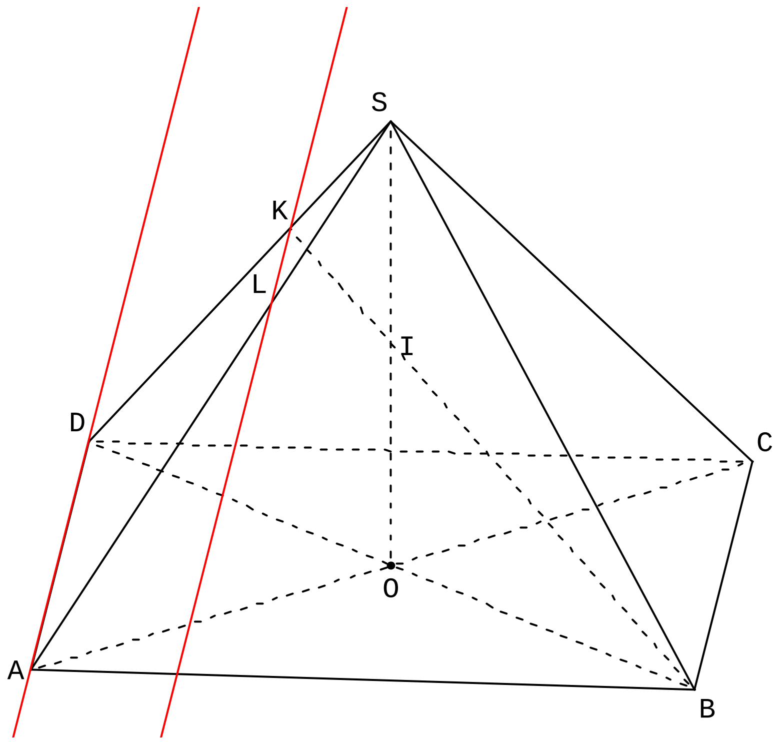
Le repère $(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$ est orthonormé.

**2. *a.*** S a pour coordonnées (0 ; 0 ; 1), D (– 1 ; 0 ; 0) donc $\overrightarrow{SD}$ a pour coordonnées (– 1 ; 0 ; – 1) donc $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3} ; 0 ; -\frac{1}{3}\right)$, les coordonnées du point *K* sont telles que $\begin{cases} x_K - x_S = -\frac{1}{3} \\ y_K - y_S = 0 \\ z_K - z_S = -\frac{1}{3} \end{cases}$ donc sont $\left(-\frac{1}{3} ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$

***b.*** *I* est le milieu du segment [*SO*] donc a pour coordonnées (0 ; 0 ; 0,5)

$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ donc $3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI}$ donc les points *B*, *I* et *K* sont alignés.

***c.***




L est le point d'intersection de l'arête [*SA*] avec le plan (*BCI*)

Soit *L'* le point défini par la relation $\overrightarrow{SL'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, donc *L'* appartient à l'arête [SA].

Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente *C*, *I* et *L'* sont alignés donc *L'* appartient au plan (*BCI*) donc *L'* est le point d'intersection de l'arête [*SA*] avec le plan (*BCI*) donc *L'* = *L* donc $\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$

$\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ donc par différence $\overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$ donc $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, les droites (*AD*) et (*KL*) sont parallèles.

***d.*** A(0 ; − 1 ; 0) et S(0 ; 0 ; 1) donc $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$ donc les coordonnées de $L$ sont telles que $\begin{cases} x_L - x_S = 0 \\ y_L - y_S = -\frac{1}{3} \\ z_L - z_S = -\frac{1}{3} \end{cases}$ donc L a pour coordonnées $\left(0\,;-\frac{1}{3}\,;\ \frac{2}{3}\right)$

**3. *a.*** $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ donc $\vec{n}.\overrightarrow{BI} = -1 \times 1 + 0 \times 1 + 0{,}5 \times 2 = 0$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\vec{n}.\overrightarrow{BC} = -1 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 0 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BI}$ donc est un vecteur normal au plan ($BCI$)

***b.*** $\overrightarrow{AS}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DS}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{n} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{DS}$, les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

***c.*** $\vec{n} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{DS}$ donc la droite Δ passant par A de vecteur directeur $\vec{n}$ est une droite du plan ($SAD$).

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan ($BCI$) donc la droite Δ est perpendiculaire au plan ($BCI$) donc les plans ($DCI$) et ($SAD$) sont perpendiculaires.

**EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**1. *a.*** Sachant qu'à la fin du ***n***-ième tirage, l'urne U ne contient pas de boule blanche la probabilité qu'à la fin du ($n$ + 1)-ème tirage elle en contienne une est $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)$

Si à la fin du ***n***-ième tirage, l'urne U ne contient pas de boule blanche, l'urne V en contient alors 2 donc au tirage suivant on ne peut choisir qu'une blanche dans l'urne V pour la déposer dans l'urne U donc $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = 1$

Si à la fin du ***n***-ième tirage, l'urne U contient une seule boule blanche, l'urne V en contient une donc soit on prend une boule noire dans l'urne U et une boule noire dans l'urne V soit on prend une boule blanche dans l'urne U et une boule blanche dans l'urne V alors $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Si à la fin du ***n***-ième tirage, l'urne U contient deux boules blanches, l'urne V contient alors deux boules noires donc on prend une boule blanche dans l'urne U et une boule noire dans l'urne V

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = 1$

***b.*** $P(X_{n+1} = 1) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) \times P(X_n = 0) + P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \times P(X_n = 1) + P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\ P(X_n = 2)$.

$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) + \frac{1}{2}\ P(X_n = 1) + P(X_n = 2)$.

**2.** $R_1 = R_0 M = (0 \quad 1 \quad 0)$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $R_n = R_0 \times M^n$.

**Initialisation :** si $n = 0$, $M \neq O$ donc $M^0 = I$ (matrice identité) donc $R_0 \times M^0 = R_0 \times I = R_0$

La propriété est initialisée.

**Hérédité :** Montrons que pour tout $n$ de N, si $R_n = R_0 \times M^n$ alors $R_{n+1} = R_0 \times M^{n+1}$.

$R_{n+1} = R_n \times M$ et $R_n = R_0 \times M^n$ donc $R_{n+1} = R_0 \times M \times M^n = R_0 \times M^{n+1}$.

La propriété est héréditaire

**Conclusion :** La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout $n$ de N, $R_n = R_0 \times M^n$.

**3.** $P \times P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$

**Initialisation :** si $n = 0$, $M \neq O$ et $D \neq O$ donc $M^0 = D^0 = I$ (matrice identité) donc $P \times D^n \times P^{-1} = P \times I \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I = M^0$

La propriété est initialisée.

**Hérédité :** Montrons que pour tout $n$ de N, si $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$ alors $M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$

$M^{n+1} = M^n \times M$ et $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$ donc $M^{n+1} = P \times D \times P^{-1} \times P \times D^n \times P^{-1} = P \times D \times I \times D^n \times P^{-1}$

$M^{n+1} = P \times D \times D^n \times P^{-1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$

La propriété est héréditaire

**Conclusion :** La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout $n$ de N, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$

On admettra que, pour tout entier naturel $n$, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**4. *a.*** Calculer $D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

***b.*** $R_0 P = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$, $R_n = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}; \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}; \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}\right)$

.

**5.** $P(X_n = 0) = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$

$-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \frac{1}{6}$ ,

$P(X_n = 1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = \frac{2}{3}$

$P(X_n = 2) = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{6}$ .

Au bout d’un nombre important d’échanges, l’urne U contient :

- 0 boules blanches avec une probabilité $\frac{1}{6}$
- 1 boules blanches avec une probabilité $\frac{2}{3}$
- 2 boules blanches avec une probabilité $\frac{1}{6}$ .