1. Soit la fonction polynôme P définie sur ℝ par : $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$.

a. Étudier les variations de P.

b. Montrer que, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, l'équation (E) $P(x) = 0$ admet une solution unique α.

c. Montrer que sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, l'équation (E) n'admet pas de solution.

2. Soit l'intervalle $]-1 ; +\infty[$, noté I. On considère la fonction f définie sur I par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+1}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm).

a. En utilisant les résultats de la question 1), étudier les variations de *f*.

b. Déterminer une équation de la tangente (T) à C au point d'abscisse 0.

c. Etudier les positions respectives de C et de (T) pour $x \in\ ]-1 ; +\infty[$.

3. *a*. Vérifier et justifier la proposition suivante : α est compris entre 0,60 et 0,61.

b. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{2}{3\alpha^2}$.

c. En déduire que $f(\alpha)$ est compris entre 1,7 et 1,9.

4. *a*. Démontrer que C admet deux droites asymptotes que l'on précisera par leurs équations.

b. Représenter C, (T) et les droites asymptotes à C.

CORRECTION

1. *a*. P est un polynôme donc est continu et dérivable sur ℝ. Ses limites à l'infini sont celles de son terme de plus haut degré, $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^3 = -\infty$.

$P'(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x + 1)$ donc $P'(x)$ est un polynôme du second degré qui s'annule en 0 et – 0,5 d'où le tableau de variations de P :

x	$-\infty$		$-0,5$		0		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	–	0	+	
P	$-\infty$	↗	$-1,75$	↘	-2	↗	$+\infty$

b. P est défini continu, strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, $P([0 ; +\infty[) = [-2 ; +\infty[$, donc $0 \in P([0 ; +\infty[)$ donc l'équation $P(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty[$.

c. Montrer que sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, l'équation (E) n'admet pas de solution.

P est croissante sur $]-\infty ; -0,5]$ et croissante sur $[-0,5 ; 0[$ donc P admet un maximum en – 0,5 ; $P(-0,5) = -0,75$ donc pour tout x de $]-\infty ; 0[$, $P(x) \leq -0,75$ donc sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, l'équation (E) n'admet pas de solution.

2. *a*. En utilisant les résultats de la question 1), étudier les variations de f.

$$f'(x) = \frac{2(x^3+1) - 3x^2(2x+1)}{(x^3+1)^2} = \frac{-(4x^3+3x^2-2)}{(x^3+1)^2} = -\frac{P(x)}{(x^3+1)^2}$$

P est strictement négatif sur $]-\infty ; \alpha[$, nul en α et strictement positif sur $]\alpha ; +\infty[$ donc :

x	-1		α		$+\infty$
-1	‖	–		–	
$P(x)$	‖	–	0	+	
$f'(x)$	‖	+		–	
f	‖	↗	$f(\alpha)$	↘	0

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^3+1} = \frac{2+\frac{1}{x}}{x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}$$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b. $f'(0) = 2$ donc (T) a pour équation $y = 2x + b$

$f(0) = 1$ donc (T) passe par le point de coordonnées $(0 ; 1)$ donc $1 = 2 \times 0 + b$ donc $b = 1$ donc (T) a pour équation $y = 2x + 1$

c. $f(x)-(2x+1)=\dfrac{2x+1}{x^3+1}-(2x+1)=(2x+1)\left(\dfrac{1}{x^3+1}-1\right)=(2x+1)\left(\dfrac{-x^3}{x^3+1}\right)$

x	-1		$-0{,}5$		0	$+\infty$
$-x^3$	‖	+		+	0	–
$2x+1$	‖	–	0	+		+
$f(x)-(2x+1)$	‖	–	0	+	0	–
	‖	C est en dessous de (T)	Point d'inter-section	C est au dessus de (T)	Point d'inter-section	C est en dessous de (T)

3. *a.* P(0,60) < 0 et P(0,61) > 0 or P est continue sur $\mathbb{R}$ donc P s'annule sur [0,60 ; 0,61] donc $0{,}60 \le \alpha \le 0{,}61$.

3. *b.* $P(\alpha)=0$ donc $4\alpha^3+3\alpha^2-2=0$ donc $4\alpha^3=2-3\alpha^2$

$$f(\alpha)-\frac{2}{3\alpha^2}=\frac{2\alpha+1}{\alpha^3+1}-\frac{2}{3\alpha^2}=\frac{3\alpha^2(2\alpha+1)-2(\alpha^3+1)}{3(\alpha^3+1)\alpha^2}$$

$$f(\alpha)-\frac{2}{3\alpha^2}=\frac{6\alpha^3+3\alpha^2-2\alpha^3-2}{3(\alpha^3+1)\alpha^2} \text{ donc } f(\alpha)-\frac{2}{3\alpha^2}=\frac{4\alpha^3+3\alpha^2-2}{3(\alpha^3+1)\alpha^2}=\frac{P(\alpha)}{3(\alpha^3+1)\alpha^2}=0 \text{ donc } f(\alpha)-\frac{2}{3\alpha^2}$$

3. *c.* $0{,}60 \le \alpha \le 0{,}61$ donc $0{,}60^2 \le \alpha^2 \le 0{,}61^2$

$3\times 0{,}36 \le 3\alpha^2 \le 3\times 0{,}3721$ soit $1{,}08 \le 3\alpha^2 \le 1{,}1163$ donc $\dfrac{1}{1{,}1163} \le \dfrac{1}{3\alpha^2} \le \dfrac{1}{1{,}08}$ donc $\dfrac{2}{1{,}1163} \le \dfrac{2}{3\alpha^2} \le \dfrac{2}{1{,}08}$

$\dfrac{2}{1{,}1163} \approx 1{,}792$ et $\dfrac{2}{1{,}08} \approx 1{,}852$ donc $1{,}7 \le f(\alpha) \le 1{,}9$

4. *a.* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{x+1}\times\frac{2x+1}{x^2-x+1}$$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x+1}{(x^2-x+1)}=-\dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à C.