

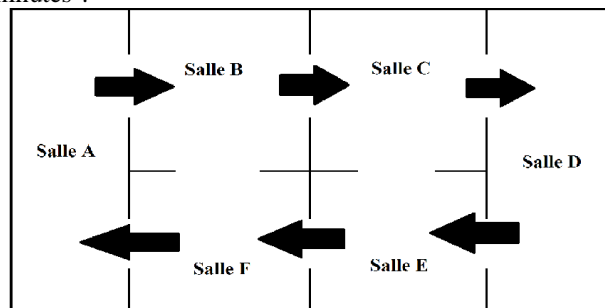
Lors d'une exposition consacrée à la peinture impressionniste, les services d'organisation ont divisé un hall rectangulaire en 6 pièces pour 6 thèmes différents.

On peut suivre un parcours thématique fléché comme ci-dessous.

On estime que 75% des visiteurs suivent le fléchage suggéré, tandis que les autres empruntent dans chaque salle de façon équirépartie une des portes de la salle (y compris celle par laquelle ils sont rentrés).

1. Si tous les visiteurs partent de la salle A à l'ouverture du musée et changent de salle toutes les 10 minutes, quelle est la répartition des visiteurs dans les salles après une heure ?

2. Quelle est la probabilité qu'un visiteur parti de la salle A ait visité la salle D au cours des 40 premières minutes ?



CORRECTION

1. Si le visiteur est en A, au bout de 10 minutes, il peut aller en B avec une probabilité 0,75 ou en F avec une probabilité 0,25.
 Si le visiteur est en B, au bout de 10 minutes, il peut aller en C avec une probabilité 0,75 ou en A ou en F avec une probabilité 0,125 dans chacun de ces deux cas.
 Si le visiteur est en C, au bout de 10 minutes, il peut aller en D avec une probabilité 0,75 ou en B ou en E avec une probabilité 0,125 dans chacun de ces deux cas.
 Si le visiteur est en D, au bout de 10 minutes, il peut aller en E avec une probabilité 0,75 ou en C avec une probabilité 0,25.
 Si le visiteur est en E, au bout de 10 minutes, il peut aller en F avec une probabilité 0,75 ou en C ou en D avec une probabilité 0,125 dans chacun de ces deux cas.
 Si le visiteur est en F, au bout de 10 minutes, il peut aller en A avec une probabilité 0,75 ou en B ou en E avec une probabilité 0,125 dans chacun de ces deux cas.

La matrice correspondant est donc : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,125 & 0 & 0 & 0 & 0,75 \\ 0,75 & 0 & 0,125 & 0 & 0 & 0,125 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0,25 & 0,125 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0,125 & 0 \\ 0 & 0 & 0,125 & 0,75 & 0 & 0,125 \\ 0,25 & 0,125 & 0 & 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix}$

Si un visiteur est à l'instant 0 en salle A, sa position est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il y reste 10 minutes donc au bout d'une heure de présence au musée, il a changé 5 fois de salle.

Sa position est donnée par $X_5 = M^5 X$ soit approximativement : $X_5 = \begin{pmatrix} 0,1704 \\ 0,4484 \\ 0,2214 \\ 0,2433 \\ 0,4314 \\ 0,4267 \end{pmatrix}$ soit la répartition :

Salle	A	B	C	D	E	F
Pourcentage	17,04	44,84	22,14	24,33	43,14	42,67

2. Pendant les 30 premières minutes, le visiteur ne peut avoir visité que les salles A, B, C, F. La probabilité qu'un visiteur parti de la salle A ait visité la salle D au cours des 40 premières minutes est donc la probabilité que le visiteur soit en salle D lors du quatrième changement de salle.

$X_4 = M^4 X$ soit $X_4 = \begin{pmatrix} 0,477 \\ 0,1626 \\ 0,5249 \\ 0,2036 \\ 0,3892 \\ 0,2002 \end{pmatrix}$.

La probabilité qu'un visiteur parti de la salle A ait visité la salle D au cours des 40 premières minutes est donc 0,2036