Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, placer les points A(– 2 ; 0), B(4 ; 0), C(2 ; 4) et D(0 ; 4).

1. Démontrer que ABCD est un trapèze isocèle.
2. Déterminer les réels α et β tels que O soit le barycentre de (A ; α) (B ; 1) (C ; 1) (D ; β)
3. Soit I le milieu de [BC] et G le point tel que $\overrightarrow{AG} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

a. Déterminer des réels *a* et *b* tels que G soit le barycentre de (A ; *a*) (D ; *b*)

b. Démontrer que G, O et I sont alignés. Préciser la position de O sur [GI]

4_*a*. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}\|$

b. Justifier que O appartient à E_1

5. *a*. Déterminer et construire l'ensemble E_2 Des points M du plan tels que : $\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\| = 16$

b. Justifier que B et D appartiennent à E_2.

CORRECTION

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (6 ; 0) et $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées (– 2 ; 0) donc $\overrightarrow{AB} = -3\,\overrightarrow{CD}$

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles donc le quadrilatère ABCD est un trapèze.

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (4 ; 4) et $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées (– 4 ; 4) donc $AB^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \times 4^2$ et $BD^2 = (-4)^2 + 4^2 = 2 \times 4^2$ donc $AB = BD = 4\sqrt{2}$, le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

2. Pour que le barycentre de (A ; α) (B ; 1) (C ; 1) (D ; β) existe il faut que $\alpha + \beta + 2 \neq 0$

Le barycentre de (B ; 1) (C ; 1) est le point I milieu de [BC], de coordonnées (3 ; 2)

Le barycentre de (A ; α) (I ; 2) (D ; β) a pour coordonnées : $\left(\dfrac{-2\alpha + 6 + 0\times\beta}{\alpha+\beta+2} ; \dfrac{0\times\alpha + 4 + 4\times\beta}{\alpha+\beta+2}\right)$ soit $\left(\dfrac{-2\alpha + 6}{\alpha+\beta+2} ; \dfrac{4 + 4\times\beta}{\alpha+\beta+2}\right)$

Ce point est le point O si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{-2\alpha+6}{\alpha+\beta+2} = 0 \\ \dfrac{4+4\times\beta}{\alpha+\beta+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + 6 = 0 \\ 4 + 4\times\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$

On vérifie que $\alpha + \beta + 2 = 3 - 1 + 2 = 4$ donc $\alpha + \beta + 2 \neq 0$ et O est le barycentre de (A ; 3) (B ; 1) (C ; 1) (D ; – 1)

3. *a*. $\overrightarrow{AG} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$3 - 1 \neq 0$ donc G est le barycentre de (A ; 3) (D ; – 1)

b. O est le barycentre de (A ; 3) (B ; 1) (C ; 1) (D ; – 1)

I est le barycentre de (B ; 1) (C ; 1) et G est le barycentre de (A ; 3) (D ; – 1) donc O est le barycentre de (G ; 2) (I ; 2)

G, O et I sont alignés, et O est le milieu de [GI].

4_*a*. I est le barycentre de (B ; 1) (C ; 1) donc $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MI}$

G est le barycentre de (A ; 3) (D ; – 1) donc $3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} = 2\,\overrightarrow{MG}$

$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}\| \Leftrightarrow 2\,MI = 2\,MG \Leftrightarrow MI = MG \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [GI]

E_1 est la médiatrice de [GI].

b. O est le milieu de [GI] donc appartient à la médiatrice de [GI] donc à E_1 (en bleu sur le graphique).

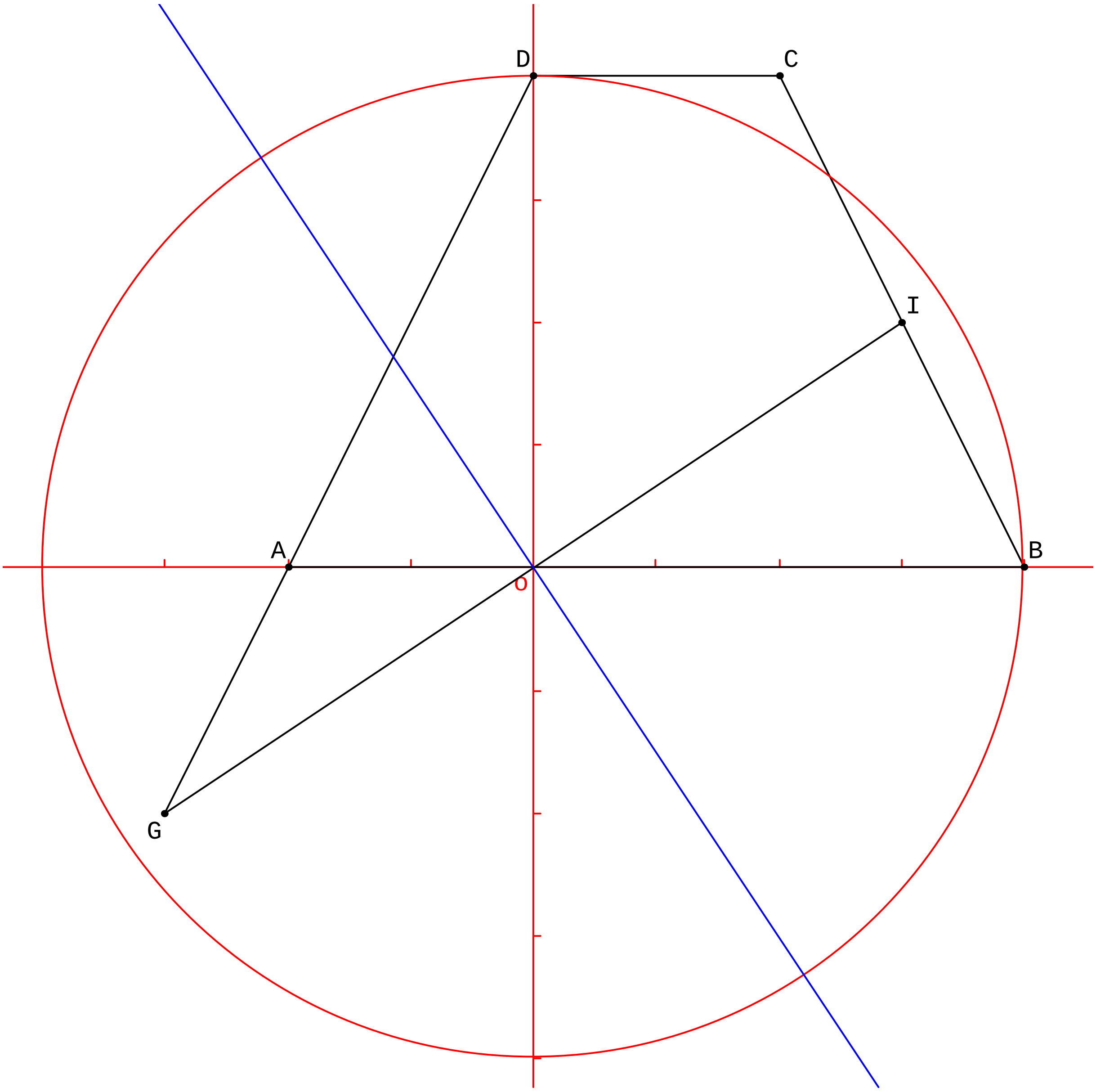
5. *a*. $3\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = 2\,\overrightarrow{MI} + 2\,\overrightarrow{MG} = 4\,\overrightarrow{MO}$

$\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\| = 16 \Leftrightarrow 4\,MO = 16 \Leftrightarrow MO = 4$

E_2 est le cercle de centre O de rayon 4 (en rouge sur le graphique).

b. B a pour coordonnées (4 ; 0), donc OB = 4 donc $B \in E_2$.

D a pour coordonnées (0 ; 4), donc OD = 4 donc $D \in E_2$.



D
C
I
A
B
O
G

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, placer les points A(– 2 ; 0), B(4 ; 0), C(2 ; 4) et D(0 ; 4).

1. Démontrer que ABCD est un trapèze isocèle.
2. Déterminer les réels α et β tels que O soit le barycentre de (A ; α) (B ; 1) (C ; 1) (D ; β)
3. Soit I le milieu de [BC] et G le point tel que $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

a. Déterminer des réels *a* et *b* tels que G soit le barycentre de (A ; *a*) (D ; *b*)

b. Démontrer que G, O et I sont alignés. Préciser la position de O sur [GI]

4_*a*. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $\left\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} \right\|$

b. Justifier que O appartient à E_1

5. *a*. Déterminer et construire l'ensemble E_2 Des points M du plan tels que : $\left\| 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \right\| = 16$

b. Justifier que B et D appartiennent à E_2.

CORRECTION

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (6 ; 0) et $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées (– 2 ; 0) donc $\overrightarrow{AB} = -3\,\overrightarrow{CD}$

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles donc le quadrilatère ABCD est un trapèze.

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (4 ; 4) et $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées (– 4 ; 4) donc $AB^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \times 4^2$ et $BD^2 = (-4)^2 + 4^2 = 2 \times 4^2$ donc $AB = BD = 4\sqrt{2}$, le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

2. Pour que le barycentre de (A ; α) (B ; 1) (C ; 1) (D ; β) existe il faut que $\alpha + \beta + 2 \neq 0$

Le barycentre de (B ; 1) (C ; 1) est le point I milieu de [BC], de coordonnées (3 ; 2)

Le barycentre de (A ; α) (I ; 2) (D ; β) a pour coordonnées : $\left(\frac{-2\alpha + 6 + 0 \times \beta}{\alpha + \beta + 2} ; \frac{0 \times \alpha + 4 + 4 \times \beta}{\alpha + \beta + 2} \right)$ soit $\left(\frac{-2\alpha + 6}{\alpha + \beta + 2} ; \frac{4 + 4 \times \beta}{\alpha + \beta + 2} \right)$

Ce point est le point O si et seulement si $\begin{cases} \frac{-2\alpha + 6}{\alpha + \beta + 2} = 0 \\ \frac{4 + 4 \times \beta}{\alpha + \beta + 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + 6 = 0 \\ 4 + 4 \times \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$

On vérifie que $\alpha + \beta + 2 = 3 - 1 + 2 = 4$ donc $\alpha + \beta + 2 \neq 0$ et O est le barycentre de (A ; 3) (B ; 1) (C ; 1) (D ; – 1)

3. *a*. $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$3 - 1 \neq 0$ donc G est le barycentre de (A ; 3) (D ; – 1)

b. O est le barycentre de (A ; 3) (B ; 1) (C ; 1) (D ; – 1)

I est le barycentre de (B ; 1) (C ; 1) et G est le barycentre de (A ; 3) (D ; – 1) donc O est le barycentre de (G ; 2) (I ; 2)

G, O et I sont alignés, et O est le milieu de [GI].

4_*a*. I est le barycentre de (B ; 1) (C ; 1) donc $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MI}$

G est le barycentre de (A ; 3) (D ; – 1) donc $3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} = 2\,\overrightarrow{MG}$

$\left\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} \right\| \Leftrightarrow 2\,MI = 2\,MG \Leftrightarrow MI = MG \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [GI]

E_1 est la médiatrice de [GI].

b. O est le milieu de [GI] donc appartient à la médiatrice de [GI] donc à E_1 (en bleu sur le graphique).

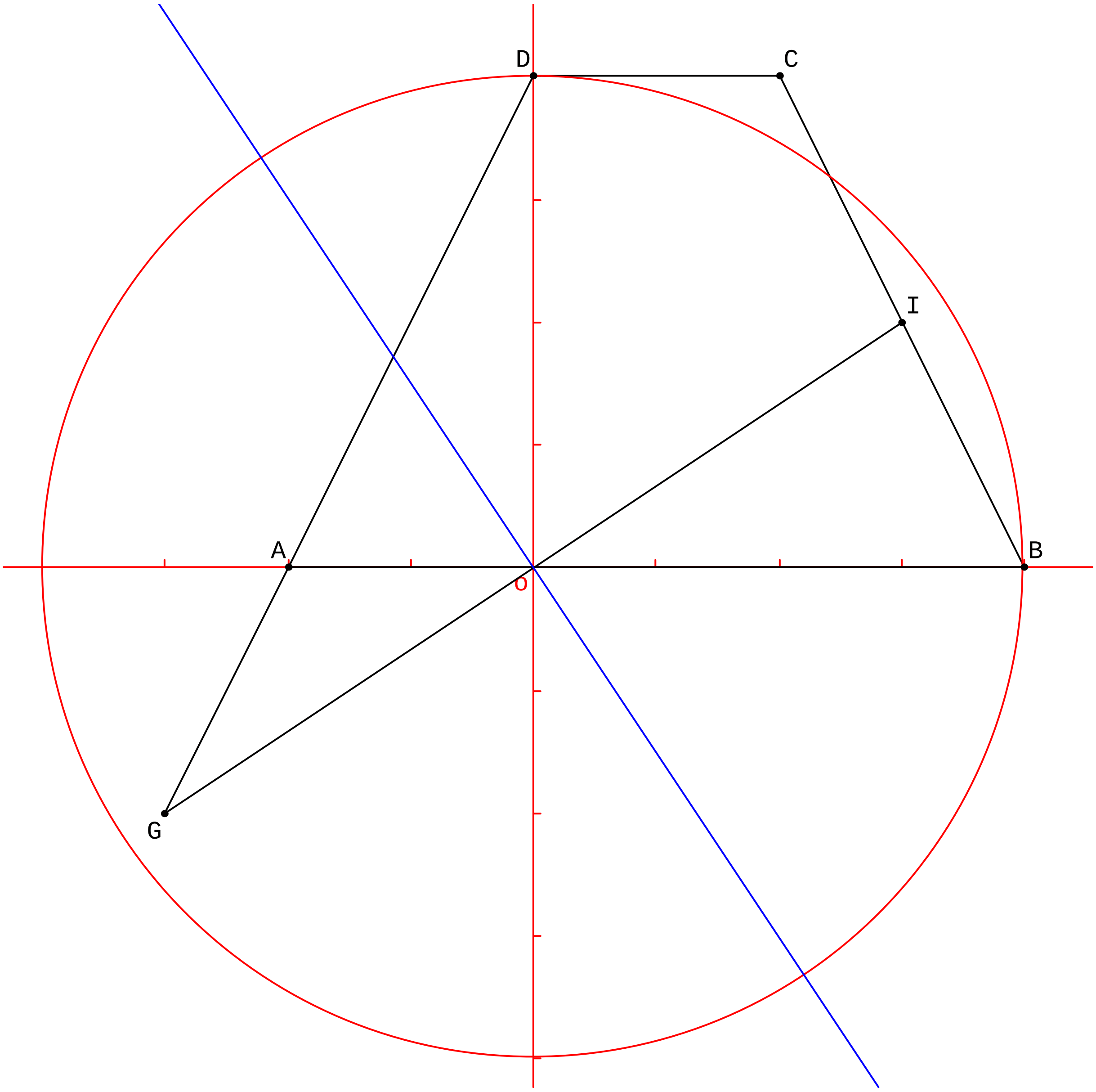
5. *a*. $3\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = 2\,\overrightarrow{MI} + 2\,\overrightarrow{MG} = 4\,\overrightarrow{MO}$

$\left\| 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \right\| = 16 \Leftrightarrow 4\,MO = 16 \Leftrightarrow MO = 4$

E_2 est le cercle de centre O de rayon 4 (en rouge sur le graphique).

b. B a pour coordonnées (4 ; 0), donc OB = 4 donc $B \in E_2$.

D a pour coordonnées (0 ; 4), donc OD = 4 donc $D \in E_2$.



D
C
I
A
B
O
G