

À propos d'équation

Cette chronique aurait pu s'appeler **Coup de gueule !**
Vous allez comprendre pourquoi.

1 Anecdote authentique

Une fille d'amis, élève en terminale ES, a eu besoin d'un petit coup de main en mathématiques ; il s'agissait de faire quelques révisions sur les dérivées et le sens de variations des fonctions. Lors du premier exercice, nous sommes arrivés à une fonction dérivée f' définie par $f'(x) = 2x - 3$. Il ne restait plus qu'à en trouver le signe pour déterminer les variations de la fonction f ; c'est donc l'inéquation $2x - 3 > 0$ que cette élève devait résoudre. Elle préféra commencer par l'équation $2x - 3 = 0$. Voici sa rédaction et ses commentaires :

$$2x - 3 = 0$$

On fait passer -3 de l'autre côté.

$$2x = -3$$

On fait passer 2 de l'autre côté.

$$x = -3 + 2$$
$$x = -1$$

Fort heureusement, j'étais assis ! Mais comment peut-on faire ça en terminale ? Visiblement, cette élève n'a aucune notion de ce qu'est une équation, ni même une égalité !

2 Les quatre opérations et le « faire passer »

Le principe de résolution d'une équation à une inconnue, est d'effectuer les mêmes opérations aux deux membres de façon à arriver à $x = \dots$

On peut utiliser successivement l'une des quatre opérations : addition, soustraction, multiplication et division. L'opération « faire passer dans l'autre membre en changeant de signe » n'existe pas ! C'est une facilité de langage qui devient souvent une catastrophe chez certains élèves qui n'ont pas compris ce que cela voulait dire.

Pour moi, c'est **totalement à éviter** devant des élèves !

Et ce ne sont pas les élèves qui ont inventé cette pirouette : il y a bien à un moment quelconque un professeur qui a employé cette expression devant eux ; d'où mon « Coup de gueule ! ».

3 Résolution

Voici ce que pourrait être une rédaction en début d'apprentissage :

On résout l'équation :

$$2x - 3 = 0$$

On ajoute 3 aux deux membres.

$$2x - 3 + 3 = 0 + 3$$
$$2x = 3$$

On divise par 2 les deux membres.

$$\frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{3}{2}$$

Évidemment, avec le temps, on pourra écrire moins de lignes, à condition que l'on comprenne ce que l'on fait !

4 Quelques remarques

- L'apparition de la lettre x peut être une réelle difficulté pour certains élèves ; l'écriture

$$2\square - 3 = 0$$

passé parfois mieux.

- En début d'apprentissage, c'est pas mal d'identifier clairement les opérations : autrement dit d'écrire $2 \times x - 3 = 0$ à la place de $2x - 3 = 0$, ou $2 \times \square - 3 = 0$ à la place de $2\square - 3 = 0$.
- Une petite vérification de tête peut éviter quelques erreurs ; on voit ainsi rapidement qu'un nombre négatif ne peut pas être solution de l'équation $2x - 3 = 0 \dots$ à condition d'avoir compris le principe de l'équation.
- En remédiation, on dira aux élèves qu'une égalité c'est comme une balance qui doit rester en équilibre : si on fait quelque chose à l'un des membres, il faut faire la même chose à l'autre membre pour garder la balance en équilibre.

$$\begin{array}{ccc} \underline{2x - 3} & \uparrow & \underline{0} \end{array}$$

5 Autre équation

Que faire si les deux membres contiennent des termes en x ?

On ne fera toujours pas « passer d'un membre dans l'autre » mais on va « regrouper les termes en x dans un même membre ».

Dans quel membre regrouper les termes en x ?

Au lieu de regrouper les termes en x systématiquement dans le membre de gauche (comme on fait souvent), je préconise de les regrouper dans le membre qui en contient le plus grand nombre, c'est-à-dire dans celui où le coefficient de x est le plus grand : on aura ainsi toujours un nombre positif de x au moment de la division, ce qui sera pratique pour les inéquations.

On résout l'équation :

$$2x - 1 = 5x + 11$$

On regroupe les termes contenant x dans le membre qui en a le plus ; pour cela on soustrait $2x$ aux deux membres.

$$2x - 1 - 2x = 5x + 11 - 2x$$

$$-1 = 3x + 11$$

On soustrait 11 aux deux membres.

$$-1 - 11 = 3x + 11 - 11$$

$$-12 = 3x$$

On divise par 3 les deux membres.

$$-\frac{12}{3} = \frac{3x}{3}$$

$$-4 = x$$

$$x = -4$$

La dernière ligne sera écrite sous la forme $x = \dots$

6 Inéquation

En suivant ces quelques règles, il n'y a plus de problème pour résoudre une inéquation.

On résout l'inéquation :

$$2x - 1 < 5x + 11$$

On regroupe les termes contenant x dans le membre qui en a le plus ;
pour cela on soustrait $2x$ aux deux membres.

$$2x - 1 - 2x < 5x + 11 - 2x$$

$$-1 < 3x + 11$$

On soustrait 11 aux deux membres.

$$-1 - 11 < 3x + 11 - 11$$

$$-12 < 3x$$

On divise par 3 les deux membres.

$$-\frac{12}{3} < \frac{3x}{3}$$

$$-4 < x$$

D'où on déduit que $x > -4$

Il faut quand même que les élèves sachent que la multiplication d'une inégalité par un nombre négatif en change l'ordre.