f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2$ pour $1 \leq x \leq 2$ et C_f la courbe représentative de cette fonction.
L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution : $\alpha = \sqrt{2}$.
On veut comparer sur cet exemple la rapidité de deux méthode de calcul de valeurs approchées d'une solution d'une telle équation $f(x) = 0$

A. **Dichotomie et méthode de Newton pour approcher une solution α de $f(x) = 0$**

* Principe de la méthode de dichotomie:
- on part d'un intervalle $[a_0 ; b_0]$ contenant α
- on construit deux suites (a_n) et (b_n):

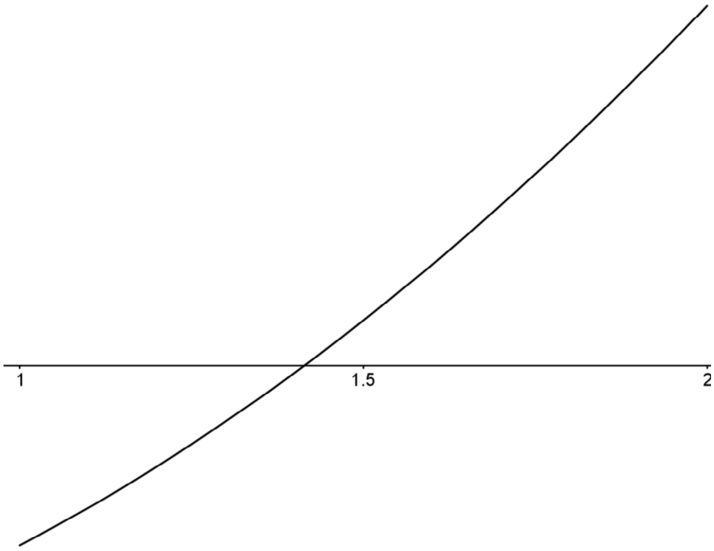
pour $n \geq 0$, si $f(a_n) \times f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, sinon $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

* Principe de la méthode de Newton-Raphson :
- on part d'une première valeur approchées x_0
- On construit une suite (x_n) de la façon suivante:

pour $n \geq 0$, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à C_f en son point d'abscisse x_n .

1. Méthode de Newton-Raphson

a. Placer α et $x_0 = 2$ sur l'axe des abscisses puis construire x_1 et x_2 sur le graphique ci-dessous.



b. Justifier que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ puis que, pour la fonction f considérée ici, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$.

c. Calculer x_1 et x_2 à la calculatrice

2. La dichotomie

On a $a_0 = 1$, $b_0 = 2$

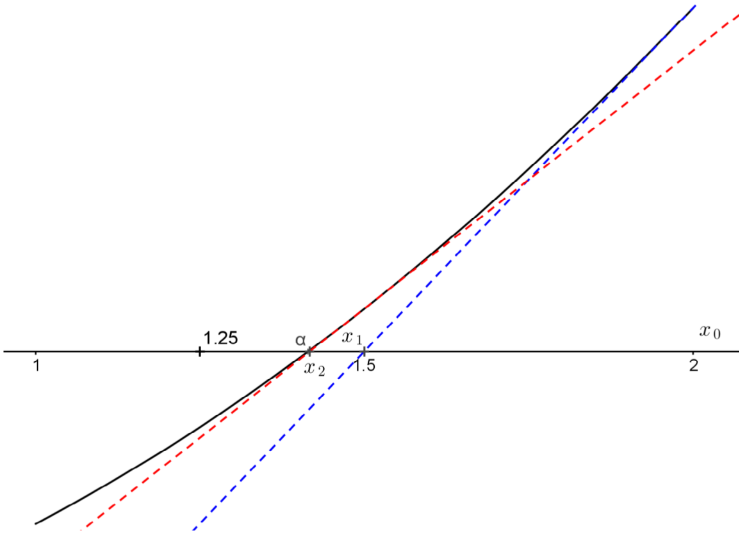
A l'aide du graphique, donner le signe de $f(a_0)$ et celui de $f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right)$. En déduire a_1 et b_1.

Déterminer de même a_2 et b_2.

CORRECTION

1. Méthode de Newton-Raphson

a.



b. La tangente à C_f en son point d'abscisse x_n a pour équation $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$.
Cette droite coupe l'axe des abscisse en un point d'abscisse x_{n+1} et d'ordonnée 0 donc $0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$
$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)$

Sur [1 ; 2], $f'(x) = 2x$ donc $f'(x) \neq 0$ donc $x_{n+1} - x_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ donc $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$f(x) = x^2 - 2$ et $f'(x) = 2x$ donc $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \dfrac{x_n^2}{2x_n} - \dfrac{2}{2x_n} = \dfrac{1}{2}x_n - \dfrac{1}{x_n}$ donc $x_{n+1} = x_n - \left(\dfrac{1}{2}x_n - \dfrac{1}{x_n}\right) = x_n - \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{x_n} =$
$\dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{x_n}$ soit $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$.

c. $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{2}{x_0}\right) = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{2}{x_1}\right) = \dfrac{17}{12}$ donc $x_2 \approx 1{,}41667$

2. La dichotomie

$a_0 = 1$, $b_0 = 2$

$f(a_0) = -1$, $\dfrac{a_0 + b_0}{2} = 1{,}5$ donc $f\left(\dfrac{a_0 + b_0}{2}\right) > 0$

$f(a_0) \times f\left(\dfrac{a_0 + b_0}{2}\right) < 0$ alors $a_1 = a_0$ et $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ soit $a_1 = 1$ et $b_1 = 1{,}5$

$f(1) < 0$ et $\dfrac{a_1 + b_1}{2} = 1{,}25$ donc $f\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}\right) < 0$

$f(a_1) \times f\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}\right) > 0$ alors $a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ et $b_2 = b_1$ soit $a_2 = 1{,}25$ et $b_2 = 1{,}5$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	1	1,25	1,375	1,375	1,40625	1,40625	1,4140625
b_n	2	1,5	1,5	1,5	1,4375	1,4375	1,421875	1,421875
$\dfrac{a_n + b_n}{2}$	1,5	1,25	1,375	1,4375	1,40625	1,421875	1,4140625	1,41796875
$f(a_n)$	– 1	– 1	– 0,4375	– 0,1094	– 0,1094	– 0,0225	– 0,0225	– 0,0004
$f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$	0,25	– 0,4375	– 0,1094	0,0664	– 0,0225	0,0217	– 0,0004	0,0106
$f(a_n) \times f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$	négatif	positif	positif	négatif	positif	négatif	positif	négatif

Il faut 7 étapes pour trouver par dichotomie que $1{,}4140625 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}421875$ alors qu'avec la méthode de Newton en deux étapes $\alpha \approx 1{,}41667$
Inconvénient : on n'a pas d'encadrement et il faut que la fonction soit dérivable à dérivée non nulle sur l'intervalle étudié.