Probabilités

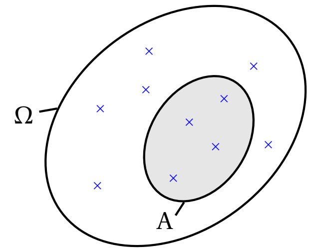
1 Vocabulaire des probabilités

1.1 Définitions

Définition 1 (Expérience aléatoire)**.**

Une expérience est dite *aléatoire* lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats) possibles et que l'on ne peut ni prévoir avec certitude, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.
L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

On considère une expérience aléatoire (lancer de dés, tirage d'une boule dans une urne . . .)



* Les résultats possibles de l'expérience sont aussi appelés **issues** ou **éventualités**.
* L'ensemble de toutes les issues constituent l'univers (souvent noté Ω ou E).
* Un événement est une partie de l'univers, c'est à dire un sous-ensemble de Ω.
* On dit qu'une issue réalise un événement A lorsqu'elle appartient à l'événement A.

Exemple 1. On lance un dé à six faces et on s'intéresse au chiffre obtenu.

- L'univers de cette expérience aléatoire est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
- On considère les événements suivants :

A :« Obtenir un nombre pair »=$\{2;4;6\}$
B :« Obtenir un multiple de 3 »=$\{3;6\}$
C :« Obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 »=$\{1;2;3;4\}$
D :« Obtenir un multiple de 6 »=$\{6\}$

1.2 Événements particuliers

Définition 2 (quelques événements particuliers)**.**

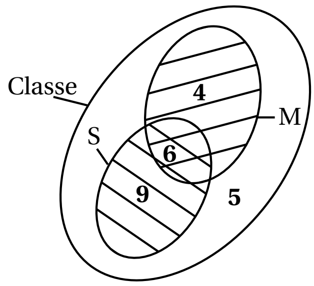
* Un **événement élémentaire** est constitué d'une seule issue.
* L'**événement impossible** est l'événement qu'aucune issue ne réalise. C'est l'ensemble vide noté $\varnothing$.
* L'**événement certain** est l'événement que toutes les issues réalisent. C'est l'univers Ω.

Exemple 2. Toujours dans notre expérience de lancer de dé...

L'événement D est un événement élémentaire.
L'événement E :« Obtenir un multiple de 7 » est l'événement impossible. $E = \varnothing$.
L'événement F :« Obtenir un nombre inférieur à 7 » est l'événement certain. $F = \Omega$.

2 Union et intersection de deux événements

Exemple 3. Dans une classe de 24 élèves, 15 élèves pratiquent un sport, 10 élèves font de la musique et 6 élèves font les deux.
On note S l'ensemble des élèves qui pratiquent un sport et M l'ensemble des élèves qui font de la musique.
On peut représenter cette situation sous la forme d'un diagramme de Venn ou à l'aide d'un tableau. On note $\overline{S}$ l'ensemble des élèves qui ne pratiquent pas de sport et $\overline{M}$ l'ensemble des élèves qui ne font pas de musique.

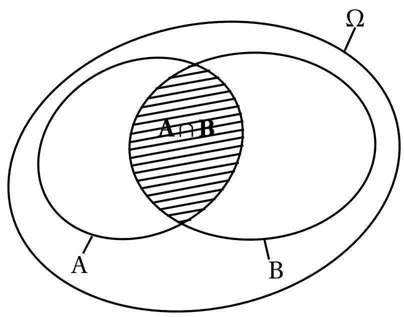


	S	$\overline{\text{S}}$	Total
M	6	4	*10*
$\overline{\text{M}}$	9	5	14
Total	15	9	24

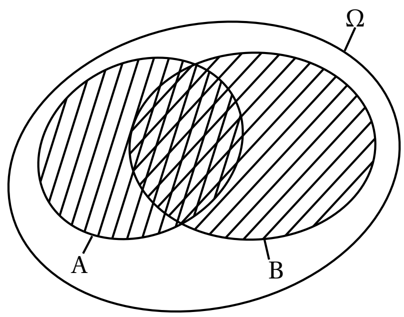
Définition 3 (union-intersection)**.**

On considère deux événements A et B d'une même expérience aléatoire.

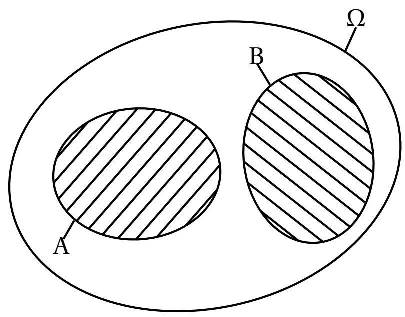
* L'intersection de A et B, notée $A \cap B$ ou $A\, et\, B$, est l'événement constitué de toutes les issues réalisant simultanément A et B.
* Lorsque deux événements ne peuvent pas être réalisés en même temps, on dit qu'ils sont incompatibles ou disjoints et on a $A \cap B = \varnothing$.
* La réunion de A et de B, notée $A \cup B$ ou $A\, ou\, B$ est constituée des issues réalisant A ou B, c'est à dire au moins l'un des deux événements.



Intersection de A et de B : $A \cap B$



Réunion de A et de B : $A \cup B$



A et B sont incompatibles : $A \cap B = \varnothing$

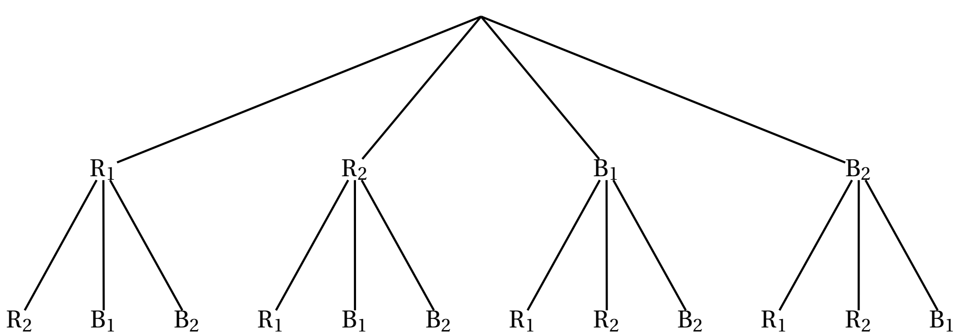
Définition 4 (événement contraire)**.**

On considère un événement A d'une expérience aléatoire.
L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$ ou $non\,A$ est constitué de toutes les issues qui ne réalisent pas A. On a $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (A et $\overline{A}$ sont incompatibles) et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Exemple 4. Une urne contient 2 boules rouges numérotées 1 et 2 et deux boules bleues numérotées 1 et 2. On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules, deux boules dans cette urne.

a) Si on a tiré la boule R_2 puis la boule B_1, on notera cette issue R_1B_2. Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire. Combien y a-t-il d'issues possibles?

   On représente la situation avec un arbre de choix (ou arbre des possibles) :



En nous aidant de l'arbre, on obtient :

$\Omega = \{ R_1R_2 ; R_1B_1 ; R_1B_2 ; R_2R_1 ; R_2B_1 ; R_2B_2 ; B_1B_2 ; B_1R_1 ; B_1R_2 ; B_2B_1 ; B_2R_1 ; B_2R_2 \}$

On remarque qu'il y a 4 choix possibles pour la première boule puis seulement 3 choix pour la seconde boule car la première n'est pas remise dans l'urne (tirage sans remise) soit un total de $4 \times 3 = 12$ résultats possibles.

b) On définit les événements suivants :

- R : « les deux boules tirées sont rouges »
- M : « les deux boules ont la même couleur »
- I : « les deux boules portent le même numéro »
- J : « la première boule tirée porte le numéro 1 »

Décrire les événements $R\cup I$, $R\cap I$, $I\cup J$, $I\cap J$, $\overline{I}$ et $\overline{M}\cap\overline{I}$.

- $R\cup I = \{ R_1R_2 ; R_1B_1 ; R_2R_1 ; R_2B_2 ; B_1R_1 ; B_2R_2 \}$
- $R\cap I = \varnothing$
- $I\cup J = \{ R_1R_2 ; R_1B_1 ; R_1B_2 ; R_2B_2 ; B_1B_2 ; B_1R_1 ; B_1R_2 ; B_2R_2 \}$
- $I\cap J = \{ R_1B_1 ; B_1R_1 \}$
- $\overline{I} = \{ R_1R_2 ; R_1B_2 ; R_2R_1 ; R_2B_1 ; B_1B_2 ; B_1R_2 ; B_2B_1 ; B_2R_1 \}$
- $\overline{M}\cap\overline{I} = \{ R_1B_2 ; R_2B_1 ; B_1R_2 ; B_2R_1 \}$

Exemple 5. Reprenons l'exemple 1 du lancer de dé. Définir les événements $A\cup B$, $A\cap B$, $A\cap C$, $A\cup C$, $C\cap D$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$:

- $A\cup B = \{2;3;4;6\}$
- $A\cap B = \{6\}$
- $A\cap C = \{2;4\}$
- $A\cup C = \{1;2;3;4;6\}$
- $C\cap B = \{3\}$
- $\overline{A} = \{1;3;5\}$
- $\overline{B} = \{1;2;4;5\}$

3 Probabilité

3.1 Définition

Définition 5 (Loi de probabilité)**.**

On considère une expérience aléatoire dont l'univers $\Omega = \{w_1; w_2; \ldots; w_n\}$ contient un nombre fini d'éléments.
Définir une loi de probabilité P sur Ω c'est associer à chaque événement élémentaire $\{w_i\}$ un nombre $P(\{w_i\}) = p_i$ de l'intervalle $[\,0\,;\,1\,]$ de telle manière que :

- la somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1 : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.
- la probabilité P(A) d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Propriété 1 ($P(\varnothing)$, $P(\Omega)$)**.**

- $P(\Omega) = 1$ et $P(\varnothing) = 0$
- Pour tout événement A de Ω, $0 \leq P(A) \leq 1$

Exemple 6. Les romains utilisaient pour jouer des astragales (petits os) à quatre faces. Ces astragales pouvaient retomber sur l'une des quatre faces numérotées 1, 2, 3 et 4. On a établi que la probabilité de l'événement « L'astragale retombe sur la face 1 » est $\frac{2}{5}$. Chacune des faces 2, 3 et 4 ont la même probabilité d'apparaître.

a) Calculer la probabilité que l'astragale retombe sur chacune des faces 2, 3 ou 4.

On sait que la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 donc $P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = 1$ avec $P(\{1\}) = \dfrac{2}{5}$ et $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = p$ d'où $\dfrac{2}{5} + 3p = 1 \iff 3p = \dfrac{3}{5} \iff p = \dfrac{1}{5}$

Ainsi $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \dfrac{1}{5}$.

b) Calculer la probabilité que l'astragale laisse apparaître un nombre impair.

$P(\{1\}) + P(\{3\}) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{5}$.

Remarque 1 : Lorsqu'on répète, dans des conditions identiques et indépendantes, la même expérience aléatoire, la fréquence observée de la réalisation d'un événement devient très proche de la probabilité de cet événement lorsque le nombre de répétitions est très grand.

Si la fréquence observée est très éloignée de la probabilité, on peut s'interroger sur la validité du modèle choisi pour probabilité.

3.2 Cas d'équiprobabilité

On parle d'équiprobabilité lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ne dépendent que du hasard, c'est à dire que tous les événements élémentaires ont la même chance de se produire. C'est le cas par exemple d'une expérience de lancer de dé parfaitement équilibré, d'un tirage du loto ...

Inversement, on ne peut pas parler d'équiprobabilité si le dé est pipé, les cartes marquées ...

Propriété 2 (Équiprobabilité)**.**

On considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω contient n issues. Dans une situation d'équiprobabilité :

- ⋆ la probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$;
- ⋆ la probabilité d'un événement A est $p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent A}}{n}$

Exemple 7. Si l'expérience consiste à lancer un dé cubique et à regarder la face obtenue, il y a équiprobabilité car toutes les faces ont une probabilité égale à $\frac{1}{6}$ d'apparaître.

Exemple 8. Une classe du lycée est composée de 15 filles et 20 garçons. Le professeur choisit un élève au hasard dans la classe. Quelle est la probabilité de l'événement A : « L'élève choisi est un garçons » ?

La probabilité de choisir un garçon peut être notée P(G). Il y a 20 garçons parmi les 35 élèves donc $\mathrm{P(G)} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

Exemple 9. Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une carte. On considère les événements :

- F : « on choisit une figure » ;
- A : « on choisit un as »
- D : « on choisit un 7, 8, 9 ou 10 ».

La loi de probabilité de cette expérience est donnée par le tableau suivant :

Événements	F	A	D
Probabilités	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

En effet, il y a 3 figures par famille et chaque famille compte 8 cartes donc $\mathrm{P(F)} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$. De plus, il y a 1 As par famille 4 As au total donc $\mathrm{P(A)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et il y a 4 cartes sur 8 qui sont des 7, 8, 9 ou 10 dans chaque famille donc $\mathrm{P(D)} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

Exemple 10. On lance un dé à six faces 500 fois. Le 4 est apparu 117 fois. Le modèle d'équiprobabilité semble-t-il adapté ?

On observe une fréquence d'apparition du 4 égale à $f_{obs} = \frac{117}{500} = 0,234$. Avec l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'obtenir un 4 est $\frac{1}{6} \approx 0,167$. On peut s'interroger sur l'écart entre la valeur observée et la probabilité... Est-ce dû au hasard ou au fait que le dé est pipé ? Des outils mathématiques peuvent aider à la prise de décision (chapitre sur la fluctuation d'échantillonnage).

3.3 Calculs de probabilités

Propriété 3 ($\mathrm{P(A \cup B)}$, $\mathrm{P(A \cap B)}$, $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$)**.**

A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire.

- ⋆ $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$
- ⋆ $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \mathrm{P(A)}$

Exemple 11. Dans une classe de 24 élèves, 15 élèves pratiquent un sport, 10 élèves font de la musique et 6 élèves font les deux. On choisit un élève au hasard dans la classe et on note :

- S : « l'élève choisi fait du sport »
- M : « l'élève choisi fait de la musique »

En vous aidant d'un tableau ou d'un diagramme :

a) Calculer P(S) et P(M).

- $P(S) = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$
- $P(M) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

b) Définir par une phrase l'événement $\overline{S}$ et calculer sa probabilité.

$\overline{S}$ est l'événement « l'élève ne fait pas de sport » : $P\left(\overline{S}\right) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

c) Définir par une phrase l'événement $S \cap M$ et calculer sa probabilité.

$S \cap M$ est l'événement « l'élève fait du sport et de la musique » : $P(S \cap M) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

d) Définir par une phrase l'événement $S \cup M$ et calculer sa probabilité.

$S \cup M$ est l'événement « l'élève fait du sport ou de la musique » : $P(S \cup M) = P(S) + P(M) - P(S \cap M) = \frac{5}{8} + \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{19}{24}$

Autre méthode : $P(S \cup M) = 1 - P\left(\overline{S} \cap \overline{M}\right) = 1 - \frac{5}{24} = \frac{19}{24}$

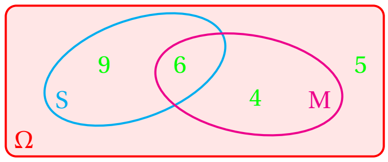
e) Un élève fait de la musique. Quelle est la probabilité qu'il fasse du sport ?

10 élèves font de la musique et parmi eux, 6 font du sport donc la probabilité cherchée est $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Tableau

	S	$\overline{S}$	**Total**
M	6	4	10
$\overline{M}$	9	5	14
Total	15	9	24

Diagramme de Venn



4 Méthodes de dénombrement

Il existe deux méthodes principales pour dénombrer : le tableau à double entrée et l'arbre.

4.1 Le tableau à double entrée

Il est souvent utilisé quand on s'intéresse à deux caractères dans un même univers.

Exemple 12. Dans un lycée, il y a 50 % d'élèves de Seconde, 30 % d'élèves de Première et 20 % d'élèves de Terminale.
Parmi les élèves de Seconde, il y en a 48 % qui sont des filles.
Parmi les élèves de Première, il y en a 51 % qui sont des filles.
Parmi les élèves de Terminale, il y en a 55 % qui sont des filles.
La répartition peut alors se représentée par le tableau suivant :

Classes / **Genres**	**Seconde**	**Première**	**Terminale**	**Total**
Filles	24 %	15,3 %	11 %	50,3 %
Garçons	26 %	14,7 %	9 %	49,7 %
Total	50 %	30 %	20 %	100 %

- On peut commencer par compléter la dernière ligne avec 50 %, 30 % et 20 % qui représentent le total (en pourcentage) de chaque classe.
- Ensuite, on calcule 48 % de 50 % : $\frac{48}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{24}{100}$, ce qui correspond au pourcentage de filles de Seconde dans l'ensemble du lycée. On procède de même pour les autres pourcentages des filles.
- On finit ensuite en complétant la ligne des garçons de sorte que le total des pourcentages de chaque colonne soit égal à celui indiqué en dernière ligne.

1. On peut ainsi dire, par exemple, que si on choisit au hasard un élève de ce lycée,

a) la probabilité que ce soit un garçon de Terminale est égale à 9 % ;

b) la probabilité que ce soit une fille est égale à 50,3 %.

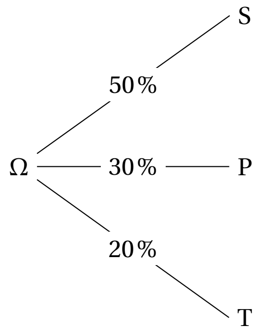
2. Si maintenant on choisit un élève parmi les garçons, la probabilité qu'il soit en Première est égale à $\frac{14,7}{49,7}$, soit $\frac{147}{497} = \frac{21}{71}$.
Attention ici, l'univers n'est plus l'ensemble du lycée mais l'ensemble des garçons.

4.2 Arbre de probabilités

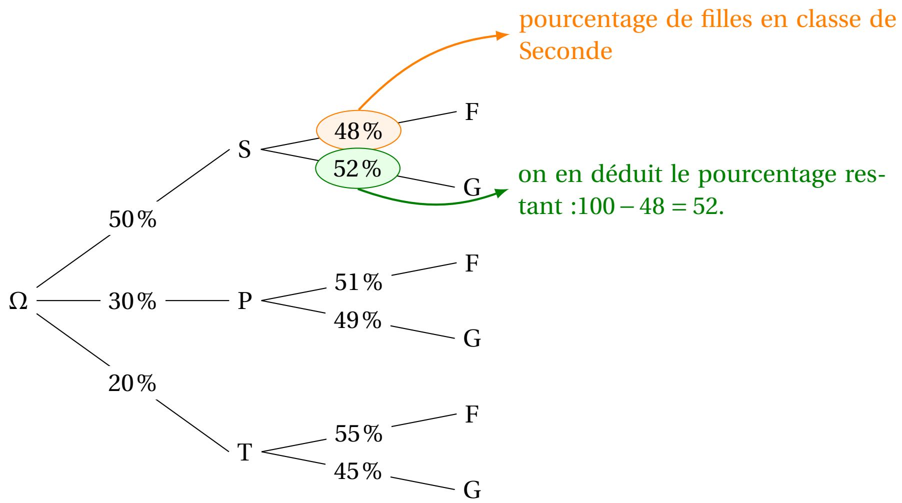
C'est sans nul doute la représentation la plus répandue en probabilités.
Reprenons l'exemple 12, et notons :

- S l'événement : « l'élève choisi.e. est en Seconde » ;
- P l'événement : « l'élève choisi.e. est en Première » ;
- T l'événement : « l'élève choisi.e. est en Terminale » ;
- F l'événement : « l'élève choisie est une fille » ;
- G l'événement : « l'élève choisi est un garçon » ;

L'énoncé nous parle en premier de la répartition des élèves en fonction de leur classe, donc le premier niveau de l'arbre doit concerner les classes :



On complète ensuite le second niveau de l'arbre par les possibilités : pour chaque élève de Seconde, Première et Terminale, nous avons la possibilité que l'élève soit une fille ou un garçon :



L'événement $T \cap G$ est : « l'élève choisi est un garçon de Terminale ».
Pour calculer $P(P \cap G)$, on multiplie les probabilités des deux branches :

$$\frac{20}{100} \times \frac{45}{100} = \frac{9}{100}.$$

On retrouve bien la probabilité trouvée dans l'exemple 12.

En revanche, la probabilité que l'élève soit en Première sachant que c'est un garçon (calculée à la question 2 de l'exemple 12) ne peut pas se lire directement sur l'arbre.
Toutefois, vous verrez en première une méthode pour la trouver à l'aide de l'arbre.