Exercice1 correction

1. La fonction carré est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. La fonction carré et la fonction définie par $u(x) = 1 + x^2$

   ont le même sens de variation, donc

   la fonction u est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ or les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$

   ont des sens de variation contraires, donc la fonction $\dfrac{1}{u}$,

   c'est à dire la fonction f, est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. $f(0) = \dfrac{1}{(1+0^2)} = 1$, et on vient de prouver que la fonction

   f est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Donc : si $x \geqslant 0$, alors $f(x) \leqslant f(0)$ or $f(0) = 1$ autrement dit : si $x \geqslant 0$, alors $f(x) \leqslant 1$

Exercice2 correction

I.

1°) L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$ est égal à :

a. $]-\infty\,;-1] \cup]0\,;1]$ b. $]0\,;1]$ c. $[-1\,;0[\cup [1\,;+\infty[$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x} \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

On résout l'inéquation $\dfrac{1-x^2}{x} \geqslant 0$ grâce à un tableau de signes (signe de $1-x^2$ et signe de x ; on a les valeurs 1, – 1 et 0 ; la valeur 0 est valeur interdite).

2°) Pour tout réel $a>0$, le nombre de solutions de l'équation $x^3 - ax = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est égal à :

a. 1 b. 2 c. 3

L'équation $x^3 - ax = 0$ est successivement équivalente à :

$x\left(x^2 - a\right) = 0$

$x\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right) = 0$

$x = 0$ ou $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$

$x = 0$ ou $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Les solutions de l'équation sont 0, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

3°) L'inégalité $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$ est équivalente à :

a. $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ b. $1 \leqslant x \leqslant 9$ c. $1 \leqslant x \leqslant 9$ ou $-9 \leqslant x \leqslant -1$

4°) Le minimum de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2mx + 4$ (m étant un réel fixé) sur $\mathbb{R}$ est égal à :

a. $-m$ b. $4-m^2$ c. m

La fonction $f : x \mapsto x^2 + 2mx + 4$ est une fonction polynôme du second degré car son expression est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 2m$ et $c = 4$. On note que $a \neq 0$.

Comme $a > 0$, f admet un minium global sur $\mathbb{R}$ atteint en $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2m}{2} = -m$.

Ce minimum est égal à $f(-m) = (-m)^2 + 2m \times (-m) + 4 = m^2 - 2m^2 + 4 = 4 - m^2$.

5°) Pour tout réel x différent de 1 et de – 1, le quotient $\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-1}$ est égal à :

a. $\dfrac{2x+3}{x+1}$ b. $\dfrac{2x-3}{x+1}$ c. $\dfrac{x-}{x-}$

On doit commencer par factoriser le polynôme $2x^2 + x - 3$.

Les racines de ce polynôme sont 1 (racine évidente) et $-\dfrac{3}{2}$ (obtenue par produit).

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $2x^2 + x - 3 = 2(x-1)\left(x + \dfrac{3}{2}\right) = (x-1)(x+3)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\} \quad \frac{2x^2+x-3}{x^2-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(2x+3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$= \frac{2x+3}{x+1}$$

Exercice3 correction

Dans tout l'exercice, on considère le polynôme $P(x)=x^2+3x-4$.

1°) Compléter la phrase :

Les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$ sont – 4 et 1 (écrire uniquement les valeurs sans égalités)

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^4+3x^2=4 \quad (1) \quad ; \quad \left|x^2+3x-2\right|=2 \quad (2)$.

Après résolution au brouillon, on complètera le tableau suivant donnant les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs de (1) et (2).

$S_1=\{1;-1\}$	$S_2=\{0;1;-3;-4\}$

Résolution de (1) :

On pose $X=x^2$ (changement d'inconnue).
L'équation (1) s'écrit : $X^2+3X=4$ qui est équivalente à $X^2+3X-4=0$.

Les racines du polynôme X^2+3X-4 sont – 4 et 1. Or $X=x^2$.

Donc l'équation (1) est successivement équivalente à : $\underbrace{x^2=-4}_{\text{impossible dans }\mathbb{R}}$ ou $x^2=1$

$x=1$ ou $x=-1$

Donc l'ensemble des solutions de (1) est : $S_1=\{1;-1\}$.

Résolution de (2) :

L'équation (2) est successivement équivalente à :

$x^2+3x-2=2$ ou $x^2+3x-2=-2$

$x^2+3x-4=0$ ou $x^2+3x=0$

$x^2+3x-4=0$ ou $x(x+3)=0$

$x=1$ ou $x=-4$ ou $x=0$ ou $x=-3$

Donc l'ensemble des solutions de (1) est : $S_2=\{0;1;-3;-4\}$.

3°) a) Compléter le tableau ci-dessous donnant le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x (ne pas oublier les 0 !).

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b)

La condition $|x|\leqslant 2$ équivaut à $-2\leqslant x\leqslant 2$.

La condition $|x|>2$ équivaut à $x<-2$ ou $x>2$.

On résout donc les systèmes $(\text{I})\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x^2+3x-4\geqslant 0\end{cases}$ et $(\text{II})\begin{cases}x<-2 \text{ ou } x>2\\ 3-x\geqslant 0\end{cases}$

(I) est successivement équivalent à :

$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant -4 \text{ ou } x\geqslant 1\end{cases}$

$1\leqslant x\leqslant 2$

(II) est successivement équivalent à :

$\begin{cases}x<-2 \text{ ou } x>2\\ x\leqslant 3\end{cases}$

$x<-2$ ou $2\leqslant x\leqslant 3$

Les réels x cherchés sont les réels vérifiant $x<-2$ ou $1\leqslant x\leqslant 3$.

Exercice4 correction

1. Justifier que la fonction f est définie pour tout réel $x \in \mathbb{R}$

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$, f est donc un quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Son dénominateur est strictement positif car, pour tout x réel , $|x| \geqslant 0$ donc $|x|+2 \geqslant 2 > 0$.
Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[\,, f(x) = -6 + \dfrac{15}{x+2}$

Sur $[0;+\infty[$, $|x| = x$ donc $f(x) = \dfrac{-6x+3}{x+2}$.
D'autre part $-6 + \dfrac{15}{x+2} = \dfrac{-6(x+2)+15}{x+2} = \dfrac{-6x+3}{x+2}$

Nous pouvons conclure : $\forall x \in [0;+\infty[\,, f(x) = -6 + \dfrac{15}{x+2}$

3. a. En utilisant l'expression de la question précédente, montrer que f est une fonction strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$, montrons que $f(a) > f(b)$.
Les inégalités suivantes sont équivalentes :
$0 \leqslant a < b$
$2 \leqslant a+2 < b+2$ **. Ajouter 2 ne change pas l'ordre**
$\dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{1}{a+2} > \dfrac{1}{b+2}$ **. On inverse, or la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc l'ordre change.**
$\dfrac{15}{2} \geqslant \dfrac{15}{a+2} > \dfrac{15}{b+2}$ **. On multiplie par 15, nombre positif, pas de changement d'ordre.**
$-6 + \dfrac{15}{2} \geqslant -6 + \dfrac{15}{a+2} > -6 + \dfrac{15}{b+2}$ **. On ajoute –6 pas de changement.**
$\dfrac{3}{2} \geqslant f(a) > f(b)$ **. Conclusion : f change l'ordre donc f est décroissante sur $[0;+\infty[$.**

b. En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3}{2}$

Nous venons de montrer que f est décroissante sur $[0;+\infty[$ donc sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Donc si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ **alors** $f(0) \geqslant f(x) \geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$ **.**

Or $f(0)=\frac{3}{2}$ **et** $f(\frac{1}{2})=\dfrac{-6(\frac{1}{2})+3}{(\frac{1}{2})+2}=0$ **donc** $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}$ **.**

4. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(-x)=f(x)$

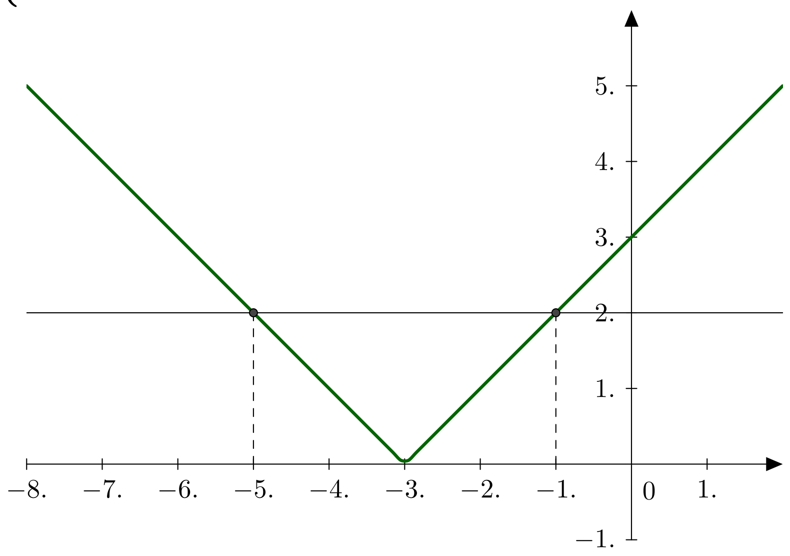
$f(-x)=\dfrac{-6|-x|+3}{|-x|+2}$ **,or pour tout réel** $x \in \mathbb{R}$ **on a** $|-x|=|x|$ **donc** $f(-x)=\dfrac{-6|x|+3}{|x|+2}=f(x)$

Exercice5 correction

1. $\pi - 3 > 0$, donc $|\pi - 3| = \pi - 3$. $1-\sqrt{3} > 0$, donc $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$.

2. (a)
   - Si $x+3 \geqslant 0$, c'est à dire $x \geqslant -3$, on a $f(x) = x+3$
   - Si $x+3 < 0$, c'est à dire $x < -3$, on a $f(x) = -(x+3) = -x-3$

   On en déduit que :
   $$\begin{cases} \text{Pour tout } x \text{ de}]-\infty;-3[, f(x) = -x-3 \\ \text{Pour tout } x \text{ de}]-3;+\infty[, f(x) = x+3 \end{cases}$$
   f est affine par morceaux



3. Graphiquement, l'équation $|x+3| = 2$ c'est à dire $f(x) = 2$, a deux solutions -5 et -1.