

EXERCICE 3

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

① f existe pour tout réel x tel que le dénominateur ($e^x + 1$) soit non nul. Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, donc $e^x + 1 > 0$, donc l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$. $D_f = \mathbb{R}$.

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$

Et plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 1 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 2$, car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$

③ • La fonction $x \rightarrow x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que fonction affine

• La fonction $x \rightarrow e^x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que somme de la fonction exponentielle et d'un réel, donc la fonction $x \rightarrow \frac{2}{1 + e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit d'un réel et de la composée de la fonction inverse (dérivable sur $\mathbb{R}^*$) et de la fonction $x \rightarrow 1 + e^x$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + \frac{0 \times (e^x + 1) - (e^x) \times 2}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{(e^x + 1)^2 - 2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)$ est du signe de $(e^x + 1)^2 - 2e^x$, car $(e^x + 1)^2$ est toujours supérieur à 0.



INSEE
INSTITUT NATIONAL
DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES
ÉCONOMIQUES

CONCOURS de contrôleur externe

ANNÉE 2020

INDIQUEZ VOTRE NUMÉRO DE CANDIDAT

N° 3192

Note et appréciations du correcteur :

18,00

N.B. - Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie

IMPRIMERIE NATIONALE

8 040505 1

ÉPREUVE

de mathématiques et statistiques

NOMBRE D'INTERCALAIRES : 6

EXERCICE 2

1.e 2.a 3.b 4.b 5.a

EXERCICE 1

PARTIE 1

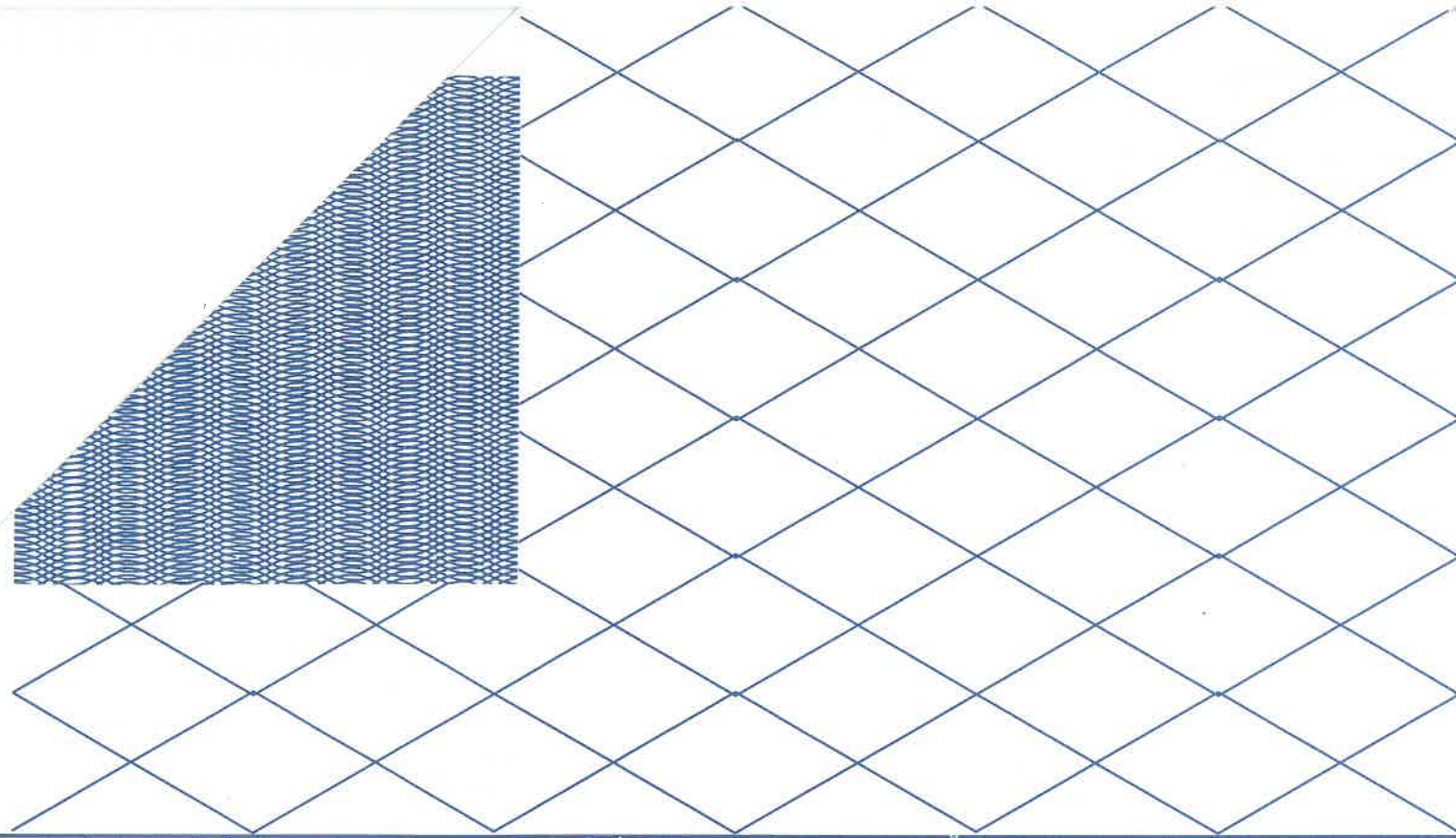
Appelons x le nombre de passagers qui descendent à Paris et y le nombre de passagers qui descendent à Lille.

D'après l'énoncé, il y a 185 passagers, donc $x + y = 185$.

Chaque passager descendant à Paris paye 30 €, donc les x passagers descendant à Paris paient $30 \times x$ euros. De même les passagers descendant à Lille paient au total $y \times 120$ €. La recette est de 21 000 € donc : $30x + 120y = 21000$.

Le problème revient donc à résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y = 185 & (1) \\ 30x + 120y = 21000 & (2) \end{cases}$$



$$① \Leftrightarrow x = 185 - y \quad ②$$

On reporte ② dans ③, il vient: $90(185 - y) + 120y = 21000$

$$\Leftrightarrow 16650 - 90y + 120y = 21000$$

$$\Leftrightarrow 30y = 4350$$

$$\Leftrightarrow y = 145 \quad ④$$

On reporte ④ dans ③, il vient: $x = 185 - 140 = 40$

40 passagers sont descendus à Paris.

Partie 2

① la droite qui passe par $I(1;2)$ et qui coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;4)$ a pour coefficient directeur:

$$a = \frac{4-2}{0-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

Son équation est de la forme $y = -2x + b$, avec $b \in \mathbb{R}$

Elle passe par $I(1;2)$ donc son équation vérifie les coordonnées de I , donc on a:

$$2 = -2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 2 + 2 \Leftrightarrow b = 4.$$

Cette droite a pour équation: $y = -2x + 4$

La droite qui passe par $I(1;2)$ et par le point de coordonnées $(-1;0)$ a pour coefficient directeur: $m = \frac{2-0}{1-(-1)} \Leftrightarrow m = \frac{2}{2} = 1$

Son équation est de la forme $y = x + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Elle passe par I , donc son équation vérifie les coordonnées de I , donc:

$$2 = 1 \times 1 + c \Leftrightarrow c = 2 - 1 = 1$$

L'équation de cette droite est donc: $y = x + 1$

② Les coordonnées du point I doivent vérifier les équations de ces deux droites, puisque le point I est leur point d'intersection. Les coordonnées x et y de I sont telles que:

$$\begin{cases} y = -2x + 4 & ① \\ y = x + 1 & ② \end{cases}$$

On reporte ② dans ①, on a: $x + 1 = -2x + 4$

$$\Leftrightarrow 3x = 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 1} \quad ③$$

On reporte ③ dans ②, on a $y = 1 + 1 = 2$

On retrouve bien par le calcul les coordonnées du point $I(1;2)$.

9192

Mathématiques et statistiques

1/6

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x + 1)^2 - 2e^x = (e^x)^2 + 2e^x + 1 - 2e^x = e^{2x} + 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x) > 0, \text{ donc } (e^x)^2 > 0, \text{ donc } (e^x)^2 + 1 > 0, \text{ donc } f'(x) > 0.$$

Par conséquent, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où le tableau de variations de f ci-dessous.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(4) $\forall a \in \mathbb{R}, (a+x) \in D_f \text{ et } (a-x) \in D_f$, puisque $D_f = \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(a-x) = f(0-x) \stackrel{(a=0)}{=} (0-x) + 1 + \frac{2}{e^{(0-x)} + 1} = -x + 1 + \frac{2}{e^{-x} + 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(a+x) = f(0+x) \stackrel{(a=0)}{=} f(x) = x + 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, f(0-x) + f(0+x) = -x + 1 + \frac{2}{e^{-x} + 1} + x + 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

$$= 2 + \frac{2}{e^{-x} + 1} + \frac{2}{e^x + 1} = 2 + \frac{2(e^x + 1) + 2(e^{-x} + 1)}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)}$$

$$= 2 + \frac{2e^x + 2 + 2e^{-x} + 2}{(e^{-x}e^x) + e^{-x} + e^x + 1} = 2 + \frac{2(e^x + e^{-x} + 2)}{1 + e^{-x}e^x + 1} = 2 + \frac{2(e^x + e^{-x} + 2)}{e^x e^x + 2}$$

$$= 2 + 2 = 4 = 2 \times b, \text{ puisque } b = 2.$$

On a bien: $\forall x \in \mathbb{R}, f(0-x) + f(0+x) = 4$, donc le point de coordonnées $(0; 2)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de f .

~~$$\textcircled{5}. \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (x+1) = x+1 + \frac{2}{e^x+1} - (x+1) = \frac{2}{e^x+1}$$~~

~~$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0, \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0, \text{ donc}$$~~

~~$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+1) = 0$$~~

~~Donc la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ et $-\infty$.~~

$$\textcircled{5}. \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (x+1) = x+1 + \frac{2}{e^x+1} - (x+1) = \frac{2}{e^x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = 0$$

Donc la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (x+3) = x+1 + \frac{2}{e^x+1} - (x+3) = \frac{2}{e^x+1} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x+1} - 2 = 0; \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x+1 = 0+1 = 1, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x+1} = 2$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+3) = 0$, donc la droite d'équation $y = x+3$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$.

9192

Mathématiques et statistiques

2/6

$$⑥. \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (x+1) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 > 0, \text{ donc } \frac{x}{x^2+1} > 0, \text{ donc } f(x) - (x+1) > 0$$

Donc la courbe représentative de f est toujours au-dessus de la droite d'équation $y = x+1$.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (x+3) = \frac{x}{x^2+1} - 2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2+1 > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} - 2 < 0 \Leftrightarrow f(x) - (x+3) < 0$$

Donc la courbe représentative de f est toujours au-dessous de la droite d'équation $y = x+3$.

⑦ Voir feuille de papier millimétré n° 1 (ou intercalaire n° 3)

$$⑧ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (x+3) < 0, \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R} (x+3) - f(x) > 0$$

$$\text{donc } \int_0^3 |x+3 - f(x)| dx = \int_0^3 [x+3 - f(x)] dx$$

Donc cette intégrale représente l'aire de la partie du plan comprise entre la droite d'équation $y = x+3$, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$.

EXERCICE 4

① $U_{n+1} = 2U_n$, pour tout $n > 0$, puisque les membres de la génération $n+1$ sont toujours deux fois plus nombreux que les membres de la génération n .

② La suite est géométrique, puisque l'on obtient U_{n+1} en multipliant U_n par un réel. Ce réel est la raison de la suite. Puisque $n > 0$, le premier terme est U_1 et $U_1 = 1$ (U_1 représente Sophie, elle est seule et unique).

Donc (U_n) est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $U_1 = 1$.

③ $\forall n \in \mathbb{N}^*, (U_n) = U_1 \times 2^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, (U_n) = 2^{n-1}$

~~④ La somme des premiers termes d'une suite géométrique est donnée par la formule : $1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$~~

~~Donc si on appelle S_5 , le nombre d'ancêtres de Sophie à la 5^e génération, $S_5 = U_1 \times \frac{1 - 2^5}{1 - 2}$~~

~~④ À la 5^e génération, le nombre d'ancêtres de Sophie~~

④ Le nombre d'ancêtres de Sophie figurant à la 5^e génération est donné par U_5 .

$$U_5 = 2^{5-1} = 2^4 = 16$$

16 ancêtres de Sophie figurent à la 5^e génération.