Analyse des circuits en régime transitoire (ordres 1 et 2)

« Dans tout ce que la nature opère, elle ne fait rien brusquement. »
Jean-Baptiste de Monet, Chevalier de Lamarck.

Résumé

Dans le but de traiter les signaux, les réseaux linéaires sont souvent soumis à des grandeurs électriques d'excitation (tensions ou courants). Le résultat du traitement est observé au travers des grandeurs de sortie. La mise en équation du système conduit à un ensemble de relations différentielles liant les entrées et les sorties. La résolution de ces équations permet de fournir l'expression de ces grandeurs au cours du temps.

Les seuls cas abordés ici concernent les circuits régis par des équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier et du deuxième ordre. Bien que les études portent sur des systèmes à une seule entrée et une seule sortie, une adaptation permettra toujours de traiter les cas où coexistent plusieurs entrées ou plusieurs sorties.

Sommaire

I. Positionnement de l'étude

L'introduction aux réseaux linéaires a montré qu'une fois définis les éléments du réseau et établie sa topologie, la mise en équation débouche sur la phase de résolution. En particulier, celle-ci passe parfois par la résolution d'une ou de plusieurs équations différentielles.

C'est à cela que nous intéressons maintenant : l'étude de l'évolution temporelle des grandeurs après l'établissement ou la disparition des sources. Les solutions obtenues découlent de **deux régimes superposés** : le régime transitoire, caractérisé par la solution générale de l'équation sans second membre (dit aussi **régime libre**), et le régime permanent, qui matérialise une solution particulière de l'équation avec second membre (le **régime forcé**).

II. Introduction

Menons l'étude du courant $i(t)$ pour les réseaux de la ***Figure 1*** et de la ***Figure 2*** où le signal $u_e(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E, c'est à dire une tension nulle avant $t = 0$ et valant E ensuite.

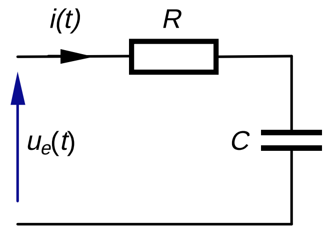

Figure 1

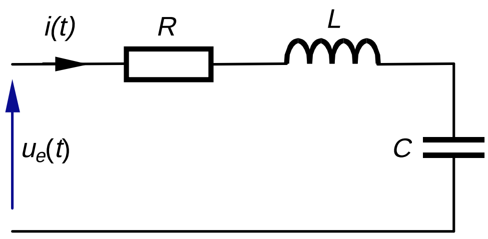

Figure 2

La mise en équation conduit à :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} i(t) = \frac{1}{R} \frac{du_e(t)}{dt}$$

Après $t = 0$, $u_e(t) = E$, donc : $\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} i(t) = 0$

La mise en équation conduit à :

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L}\frac{du_e(t)}{dt}$$

Après $t = 0$: $\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0$

La simple observation de ce premier résultat nous fait apparaître que dans le premier cas, la mise en équation conduit à une équation différentielle du premier ordre, tandis que dans l'autre cas, on obtient une équation différentielle du second ordre.

Les études qui vont suivre concerneront ces deux types de réseaux. Si la mise en équation conduit à une **équation différentielle du premier ordre**, on dit que l'on a affaire à un **cicuit du premier ordre** (un tel circuit possède souvent un seul élément réactif). Si l'**équation** est du **second ordre**, le circuit porte le même nom (il y a souvent deux éléments réactifs). On effectue très rarement une analyse de ce type pour des circuits d'un ordre supérieur.

Dans la suite de l'exposé, nous considérerons que le signal de sortie (exprimé en fonction du temps) est noté $s(t)$, tandis que le signal d'entrée est noté $e(t)$.

III. Etude temporelle des circuits du premier ordre

III.1. Equation et résolution

Un circuit du premier ordre est régi par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\boxed{\frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} s(t) = u_e(t) \;\; avec \begin{cases} \tau \text{ est la constante de temps du circuit, homogène à un temps.} \\ u_e(t) \text{ est le second membre qui traduit l'influence exté rieureau circuit.} \end{cases}}$$

Remarque : dans la suite du document, on utilisera $s'(t)$ pour $ds(t)/dt$ pour alléger la notation.

III.2. Exemple : Circuit RC

Analysons le comportement du circuit RC de la ***Figure 3*** lorsque l'on applique un échelon de tension d'amplitude E.

Mise en équation : $u_e(t)-Ri(t)-u_c(t) = 0$,

ce qui fournit : $u_C'(t)+1/RC.u_C(t) = u_e(t)/ RC$.

L'équation est bien celle d'un circuit du premier ordre, qu'il ne reste qu'à résoudre.

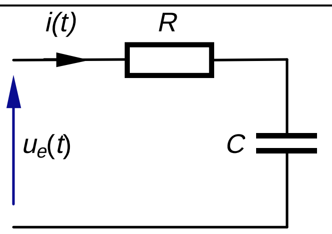

Figure 3 : circuit RC.

III.2.1. A la mise sous tension (charge)

1. Solution générale de l'équation sans second membre (SGESSM)

   $u_C'(t)/ u_C(t) = -1/RC$. Il s'agit de la dérivée de la fonction logarithme, $d[ln(u_C(t))]/dt=-1/RC$, on a donc $u_C(t) = Kexp(-t/RC)$ ou K est une constante réelle, homogène à une tension.
2. Solution particulière de l'équation avec second membre (SPEASM)

   Ici, la solution est recherchée sous la forme d'une constante $U_{C\infty}$ et manifeste le régime permanent.

   On a donc $U_{C\infty}/RC = E/RC$, donc la solution particulière est E.
3. La solution complète est la superposition des deux solutions précédentes, c'est à dire :

   $u_C(t)=Kexp(-t/RC) + E$

   Pour rechercher la constante K, il faut connaître une condition initiale du circuit. Cette dernière est trouvée en analysant la valeur de u_C à l'instant où l'on applique l'échelon de tension.

   Ici, *on* considère qu'à $t = 0^+$, $u_C(0^+) = U_{C0}$.

   On a alors $u_C(0^+) = Kexp(0/RC) + E \Rightarrow K+E = U_{C0}$, *soit* $K = U_{C0} - E$.

En résumé, la solution représentant la tension aux bornes du condensateur lorsque l'on applique un échelon de tension est :

$$\boxed{u_C(t) = (U_{CO} - E)e^{-\frac{t}{RC}} + E \text{ pour } t \geq 0.}$$

Remarque 1 : si l'échelon apparaît à l'instant $t = t_0$, il faut réaliser une translation temporelle, c'est à dire effectuer le changement de variable t en t-t_0.

Remarque 2 : dans une telle configuration, si U_{init} est la valeur initiale de u_C et U_{finale} la valeur en régime établi, $u_C(t)$ s'exprime par :

$$\boxed{u_C(t) = (U_{init} - U_{finale})e^{-\frac{t}{RC}} + U_{finale} \text{ pour } t \geq 0.}$$

III.2.2. A la rupture de la source (décharge)

A la rupture de la source, le générateur n'apparaît plus dans la mise en équation, i.e. $u_e(t)$=0.

L'équation devient : $u_C(t) + Ri(t)$=0, ce qui fournit $u_C'(t) + 1/RC.u_C(t) = 0$.

La solution est donc (SGESSM)+(0) : $u_c(t) = K.exp(-t/RC)$ avec K réelle, homogène à une tension.

Pour rechercher la constante K, il faut connaître la condition initiale du circuit. Cette fois le condensateur était totalement chargé, donc $U_{C0} = E$ à $t = 0$. Ceci conduit à $K = E$.

En résumé, la solution représentant la tension aux bornes du condensateur après la rupture de la tension est :

$$\boxed{u_C(t) = U_{CO}e^{-\frac{t}{RC}} \text{ pour } t \geq 0.}$$

Remarque : la remarque 2 du §III.2.1 s'applique ici parfaitement, car en régime permanent la tension $U_{C\infty} = U_{finale}$ est nulle.

III.2.3. Implications pratiques… et technologiques

Pour des conditions initiales nulles, la tension aux bornes du condensateur durant les deux phases précédentes est représentée à la ***Figure 4***. Le produit *RC*, homogène à un temps, est souvent noté τ. C'est par rapport à cette valeur que l'on peut normaliser l'étendue temporelle de la charge et de la décharge d'un condensateur. A ce titre, pour $t = \tau$, le condensateur est chargé à 63% de sa valeur finale E tandis qu'à la décharge, il ne reste que 37% de la tension initiale. On peut donc dire qu'au delà de $t = 5\tau$, le condensateur est totalement chargé (ou déchargé).

Une particularité de construction est à retenir : la tangente à l'origine coupe l'asymptote à la courbe en $t = \tau$, tandis que la tangente en ce point coupe l'asymptote en 2τ.

Enfin, l'allure de la tension aux bornes du condensateur traduit un retard à l'établissement de l'échelon. C'est en effet une caractéristique des circuits *RC*, celle de retarder l'établissement ou la disparition de la tension.

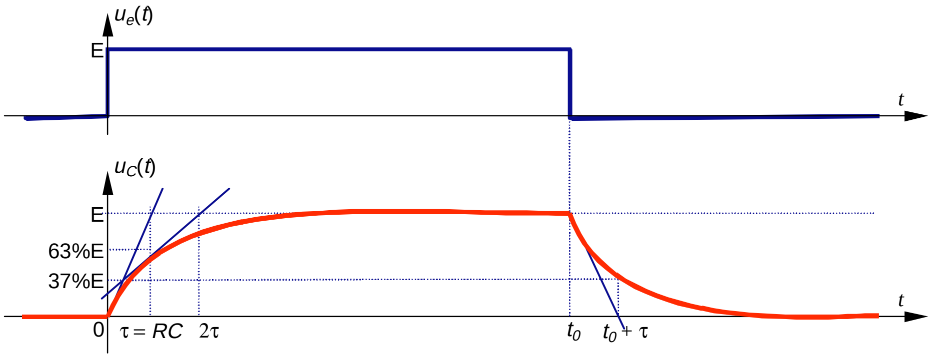

Figure 4 : réponse temporelle du circuit RC.

IV. Etude temporelle des circuits du second ordre

IV.1. Equation et résolution

Un système linéaire du second ordre répond à l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0{}^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=ku_e(t)\left\{\begin{array}{l}\omega_0 \text{ est la pulsation propre du circuit (rad.s}^{-1}\text{)},\\ z \text{ est le coefficient d'amortissement du circuit (sans unité et} \geq 0\text{)},\\ k \text{ est le gain statique (sans unité et} \geq 0\text{)}\end{array}\right.}$$

La présentation sous cette forme, avec la définition de ces coefficients (k, z et ω_0), est dictée par le soucis de matérialiser les phénomènes qui se produisent pour des valeurs charnières de ces coefficients.

La résolution de cette équation différentielle suit un cheminement légèrement plus élaboré que dans le cas du premier ordre. D'autre part, une discussion sur la valeur de certaines grandeurs s'impose.

Etude du régime libre

Posons d'abord l'équation caractéristique : $\frac{1}{\omega_0{}^2}r^2+\frac{2z}{\omega_0}r+1=0$.

Le discriminant (réduit) est : $\Delta' = \frac{z^2-1}{\omega_0{}^2}$. La discussion peut s'engager.

- $\Delta > 0$, donc $z^2 > 1$, c'est-à-dire $z > 1$ (car $z \geq 0$) : les deux racines r_1 et r_2 sont réelles.

$r_1 = \omega_0(-z-\sqrt{z^2-1})$ et $r_2 = \omega_0(-z+\sqrt{z^2-1})$ sont de même signe (souvent négatives).

La SGESSM s'écrit alors : $\boxed{s(t) = K_1e^{r_1t}+K_2e^{r_2t}}$

- $\Delta = 0$, donc $z^2 = 1$, c'est à dire $z = 1$ (car $z \geq 0$) : la racine r est double.

$r = -\omega_0$

La SGESSM s'écrit : $\boxed{s(t) = (K_1 t + K_2)e^{rt}}$

- $\Delta < 0$, donc $z^2 < 1$, c'est à dire $z < 1$: les deux racines r_1 et r_2 sont complexes conjugées.

$r_1 = \omega_0 (z - j\sqrt{1-z^2}) = \alpha - j\beta$ et $r_2 = \omega_0 (z + j\sqrt{1-z^2}) = \alpha + j\beta$.

On pose alors $\alpha = -z\omega_0$ et $\beta = \omega_0 \sqrt{1-z^2}$

La SGESSM s'écrit : $\boxed{s(t) = e^{\alpha t}(K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t)}$

Etude du régime forcé

Ce régime correspond à la SPEASM. Les solutions particulières les plus courantes pour ce qui nous concerne sont la constante ou la somme de fonctions trigonométriques de même pulsation que celle de la source.

La solution complète est la somme des deux solutions précédemment définies. La résolution se termine par la recherche des constantes grâce à la connaissance des conditions initiales.

IV.2. Exemple : circuit RLC série à la mise sous tension

Analysons le comportement du circuit *RLC* de la ***Figure 5*** lorsque l'on applique un échelon de tension d'amplitude *E*.

Equation : $u_e(t) - Ri(t) - u_L(t) - u_c(t) = 0$,

ce qui fournit : $LCi''(t) + RCi'(t) + i(t) = 0$

L'équation est bien celle d'un circuit du second ordre qu'il ne reste qu'à résoudre.

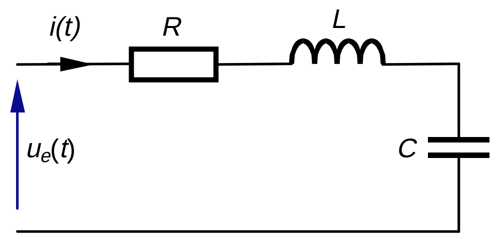

Figure 5 : circuit RLC série.

IV.2.1. Solution générale de l'équation sans second membre (SGESSM)

Equation caractéristique : $LCr^2 + RCr + 1 = 0$

Remarques : nous avons déjà vu que le produit *RC* est homogène au temps. Ceci implique que les solutions de l'équation caractéristiques sont homogènes à l'inverse du temps (fréquence ou pulsation), donc que *LC* est homogène au carré du temps, <u>i.e.</u> au carré de la pulsation.

Dans ces conditions, on pose $RC = \tau$ ($= 2z/\omega_0$) et $LC = 1/\omega_0^2$. Ceci permet de retrouver des éléments similaires à ceux rencontrés précédemment.

$$\Delta = R^2C^2 - 4LC = \tau^2 - \frac{4}{\omega_0^2} .$$

- 1[er] cas : $\Delta > 0$, donc $\tau^2 > 4/\omega_0^2$, soit $\tau > 2/\omega_0$ car les grandeurs sont positives.

$r_1 = \frac{\tau\omega_0^2}{2}(-1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\tau^2\omega_0^2}}) < 0$ et $r_2 = \frac{\tau\omega_0^2}{2}(-1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\tau^2\omega_0^2}}) < 0$ donc $\boxed{i(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}}$

- 2[ème] cas : $\Delta = 0$, donc $\tau^2 = 4/\omega_0^2$, soit $\tau = 2/\omega_0$. $r = -\omega_0$ donc $\boxed{i(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-\omega_0 t}}$

■ 3[ème] cas : $\Delta < 0$, donc $\tau^2 < 4/\omega_0^2$.

$$r_1 = -\frac{\tau\omega_0^{\,2}}{2} - j\omega_0\sqrt{1-\frac{\tau^2\omega_0^{\,2}}{4}} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\tau\omega_0^{\,2}}{2} + j\omega_0\sqrt{1-\frac{\tau^2\omega_0^{\,2}}{4}}$$

$$\alpha = -\frac{\tau\omega_0^{\,2}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \omega_0\sqrt{1-\frac{\tau^2\omega_0^{\,2}}{4}}$$

$$\text{donc } \boxed{i(t) = e^{-\frac{\tau\omega_0^{\,2}}{2}t}\left(K_1\cos(\omega_0\sqrt{1-\frac{\tau^2\omega_0^{\,2}}{4}}t) + K_2\sin(\omega_0\sqrt{1-\frac{\tau^2\omega_0^{\,2}}{4}}t\right)}$$

IV.2.2. Solution particulière de l'équation avec second membre (SPEASM)

Dans le cas du courant, le second membre est nul, cette partie de la solution est nulle.

IV.2.3. Solution complète

La solution complète est la somme des 2 solutions partielles précédentes. Pour déterminer les constantes, on utilise les conditions initiales. Dans notre cas : à $t = 0^+$, $i(0^+) = 0$ et $u_C(0^+)=0$, i.e. $u_L(0^+) = E$.

Les différents cas sont présentés dans les encadrés ci-dessous.

$$i(t) = K_1e^{r_1t} + K_2e^{r_2t} \quad \text{et} \quad u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = K_1r_1e^{r_1t} + K_2r_2e^{r_2t}$$

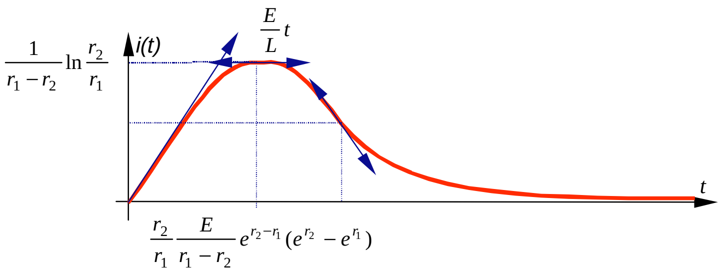

Figure 6

$i(0^+) = 0$, donc $K_1+K_2 = 0$,
$u_L(0^+) = E$, donc $K_1r_1 + K_2r_2 = E/L$.
$K_1 = E/(r_1-r_2)L$ et
$K_2 = -E/(r_1-r_2)L$.

Un tel signal est apériodique, c'est le **régime apériodique**.

Le courant a donc pour expression : $i(t) = \frac{E}{r_1-r_2}(e^{r_1t} - e^{r_2t})$ [Représentation ***Figure 6***]

$$i(t) = (K_1 + K_2t)e^{-\omega_0t} \quad et \quad u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L(K_2 - \omega_0(K_1 + K_2t))e^{-\omega_0t}$$

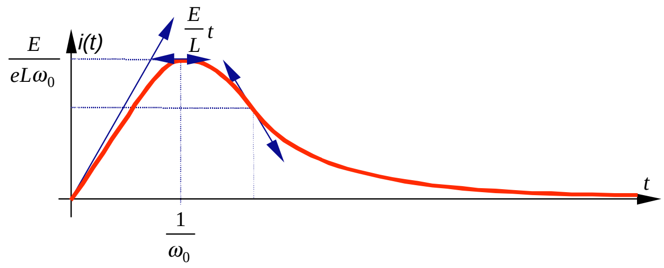

Figure 7

$i(0^+) = 0$, donc $K_1 = 0$,
$u_L(0^+) = E$, donc $K_2 = E/L$

Ce signal est apériodique, mais à la limite du régime, c'est le **régime critique**.

Le courant a donc pour expression : $i(t) = \frac{E}{L}te^{-\omega_0t}$ [Représentation ***Figure 7***]

$$i(t)=e^{-\frac{\tau\omega_0{}^2}{2}t}\left(K_1\cos(\omega_0\sqrt{1-\frac{\tau^2\omega_0{}^2}{4}}t)+K_2\sin(\omega_0\sqrt{1-\frac{\tau^2\omega_0{}^2}{4}}t)\right)$$

$$u_L(t)=Le^{-\frac{\tau\omega_0{}^2}{2}t}\left[(K_2\Omega-\frac{\tau\omega_0{}^2}{2}K_1)\cos\Omega t-(K_1\Omega+\frac{\tau\omega_0{}^2}{2}K_2)\sin\Omega t\right]\quad avec\ \Omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{\tau^2\omega_0{}^2}{4}}$$

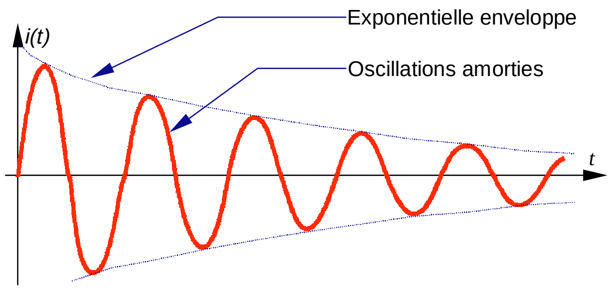

Figure 8

$i(0^+) = 0$, donc $K_1 = 0$,
$u_L(0^+) = E$, donc $K_2 = E/L\Omega$

Le régime est dit **oscillatoire amorti représenté à la *Figure 8*.**

Le courant a donc pour expression : $i(t)=\dfrac{E}{L\Omega}e^{-\frac{\tau\omega_0{}^2}{2}t}\sin\Omega t$ [Représentation ***Figure 8***]

IV.2.4. Cas particulier du régime non amorti

Si aucun élément dissipatif n'est présent dans le circuit ($R = 0$), l'équation différentielle devient :

$$LC\frac{d^2i(t)}{dt^2}+i(t)=0$$

Elle conduit à un courant de la forme :

$$i(t)=K_1\cos\omega_0 t+K_2\sin\omega_0 t=I_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)\,.$$

Le courant est une fonction sinusoïdale du temps. C'est à dire que le régime est purement oscillatoire. L'amortissement est nul ($\alpha = 0$), l'exponentielle enveloppe devient une droite horizontale.

C'est dans ce cas de figure que l'on se place si on réalise un oscillateur sinusoïdal. Le problème technologique consiste alors à annuler la résistance équivalente du circuit.