Métropole ; La Réunion septembre 2007

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

(E) : $y' + (1 + \tan x)\, y = \cos x$

(E_0) : $y' + y = 1$.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x) \cos x$.

   Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

CORRECTION

1. Une fonction constante g solution de (E_0) vérifie $g' = 0$ et $g' + g = 1$ donc $g = 1$

Les solutions de $y' + y = 0$ sont les solutions de $y' = -y$ donc les solutions de $y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $k\,e^{-x}$ où k est un nombre réel.

Les solutions de (E_0) sont les fonction de la forme $f(x) = 1 + k\,e^{-x}$ où k est un nombre réel.

2. $f(x) = g(x) \cos x$ de la forme $u\,v$ or $(u\,v)' = u'\,v + v'\,u$

Soit $u(x) = g(x)$ $\quad u'(x) = g'(x)$

$v(x) = \cos x$ $\quad v'(x) = -\sin x$ $\quad$ donc $f'(x) = g'(x) \cos x - g(x) \sin x$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $f'(x) + (1 + \tan x) f(x) = \cos x$

$\Leftrightarrow$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) \cos x - g(x) \sin x + (1 + \tan x)\, g(x) \cos x = \cos x$

or $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ soit $(1 + \tan x) \cos x = \cos x + \sin x$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow g'(x) \cos x - g(x) \sin x + (\cos x + \sin x)\, g(x) = \cos x$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow g'(x) \cos x + \cos x\, g(x) = \cos x$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ $\Leftrightarrow [g'(x) + g(x) - 1] \cos x = 0$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

or pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \neq 0$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow [g'(x) + g(x) - 1] \cos x = 0$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow g'(x) + g(x) - 1 = 0$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow g$ solution de (E_0)

3. f est solution de (E) $\Leftrightarrow g$ solution de (E_0) $\Leftrightarrow g(x) = 1 + k\,e^{-x}$ or $f(x) = g(x) \cos x$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow f(x) = (1 + k\,e^{-x}) \cos x$

$f(0) = 0$ donc $(1 + k\,e^{0}) \cos 0 = 1 + k = 0$ soit $k = -1$

f est solution de (E) et $f(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (1 - e^{-x}) \cos x$