On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par : $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}\, b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.

2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables:       A et B des nombres réels
                 K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
                 Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
      Affecter à A la valeur (A + √(A² + B²))/3
      Affecter à B la valeur 1/3
FinPour
Afficher A
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de b_n.

2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de la suite (b_n).

3. *a.* On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).
Montrer que pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \leq \dfrac{2|z_n|}{3}$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leq u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

CORRECTION

Partie A

1. $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$

2. $|z_0| = |1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$

$z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{3} = \dfrac{1 + \sqrt{2} + \mathrm{i}}{3} = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ donc $a_1 = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3. *a.*

K	A	B
1	$\dfrac{1 + \sqrt{1^2 + 1^2}}{3}$ soit environ 0,8047	$\dfrac{1}{3}$ soit environ 0,3333
2	0,5586	$\dfrac{1}{9}$ soit environ 0,1111

b. L'algorithme calcule de proche en proche a_K et b_K pour K variant de 1 à N et affiche a_N.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$ donc $z_{n+1} = \dfrac{a_n + \mathrm{i}\, b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} = a_{n+1} + \mathrm{i}\, b_{n+1}$

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3}$.

2. $b_{n+1} = \dfrac{1}{3} b_n$ donc la suite (b_n) est géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{3}$ donc $b_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$

3. *a.* $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$ donc $|z_{n+1}| = \dfrac{1}{3}\, |z_n + |z_n||$ d'après l'inégalité triangulaire, $|z_{n+1}| \le \dfrac{1}{3}\, (|z_n| + |z_n|)$

soit $|z_{n+1}| \le \dfrac{2}{3} |z_n|$. Pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \le \dfrac{2|z_n|}{3}$.

b. Initialisation : si $n = 0$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = \sqrt{2} = |z_0| = u_0$.

Hérédité, montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $u_n \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$ alors $u_{n+1} \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$

pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \le \dfrac{2|z_n|}{3}$ donc $u_{n+1} \le \dfrac{2}{3} u_n$

$$\boxed{\begin{array}{lll} u_{n+1} & \le & \dfrac{2}{3} u_n \\ & u_n \le & \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} \end{array}} \text{ donc } \boxed{\begin{array}{lll} u_{n+1} & \le & \dfrac{2}{3} u_n \\ & \dfrac{2}{3} u_n \le & \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} \end{array}} \text{ donc } u_{n+1} \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$$

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

$-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ or $0 \le u_n \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

c. Pour tout entier naturel n, $|z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ or $a_n^2 \le a_n^2 + b_n^2$ donc $\sqrt{a_n^2} \le |z_n|$ donc pour tout entier naturel n, $|a_n| \le u_n$.

$0 \le |a_n| \le u_n$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.