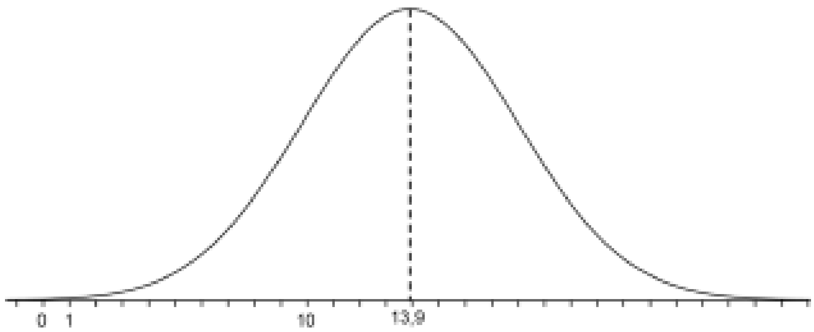
EXERCICE 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\alpha = 13{,}9$ et d'écart type σ.

La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous ;



1. On sait que $P(T \geq 22) = 0{,}023$. En exploitant cette information :

a. Hachurer, sur le graphique donné en annexe deux domaines distincts dont l'aire est égale à 0,023.

b. Déterminer $P(5{,}8 \leq T \leq 22)$ Justifier le résultat.

Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est 4,1.

2. On choisit un jeune en France au hasard.

Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine. Arrondir au centième.

Partie B

Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.

La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des œuvres et la protection des droits sur internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.

Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole (**P**) suivant :

On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans. Pour chaque jeune de cet échantillon

- le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
- l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;

- si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
- si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui »:
- si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

1. Calculs de probabilités

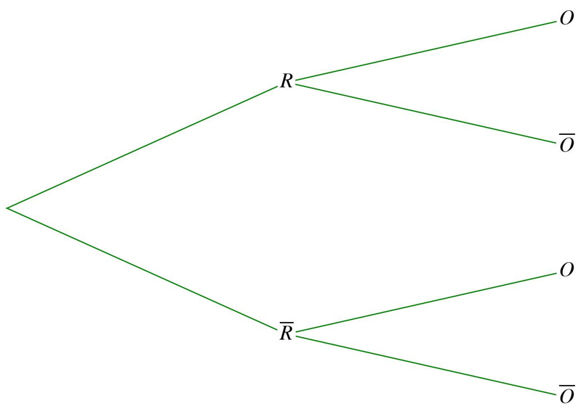
On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole (**P**).

On note : R l'évènement « le résultat du lancer est pair ».

O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».

Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :

En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu « Oui » est : $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$



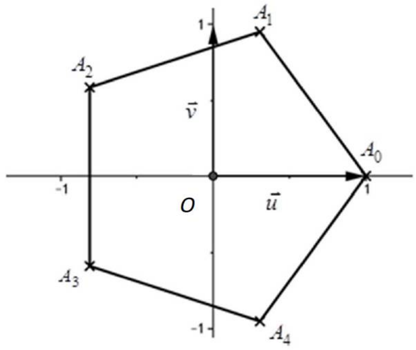
2. Intervalle de confiance

a. A la demande de la Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole (**P**). Sur un échantillon de taille 1500, il dénombre 625 réponses « Oui ». Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

b. Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

EXERCICE 2 (3 points) Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.



Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$ de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$.

On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$ ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points $A_0A_1A_2A_3$ et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ on a $(\overrightarrow{OA_k} ; \overrightarrow{OA_{k+1}}) = \frac{2\pi}{5}$.

1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\frac{i}{2}$.

Le cercle **C** de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment [BJ] en un poing K.

Calculer BJ, puis en déduire BK.

2. *a.* Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.

b. Démontrer que $BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

c. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification

Calcul formel	
1 o	cos(4 * pi/5) $=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$
2 o	sqrt(3-sqrt(5))/2) $=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

« sqrt » signifie « racine carrée »

En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

3. Dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

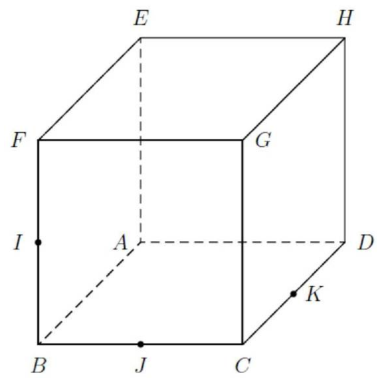
EXERCICE 3 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

ABCDEFGJI désigne un cube de côté 1.

Le point I est le milieu du segment [BF].

Le point J est le milieu du segment [BC].

Le point K est le milieu du segment [CD].



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification.

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.

Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection **D** des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées de A, G, L, J et K dans ce repère.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle [0 ; 1] tel que : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG}$.

a. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$

b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

4. Démontrer que pour ce point $N\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

a. N appartient au plan (IJK).

b. La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

EXERCICES 3 (5 points) **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, où a et b sont des nombres entiers.

Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M. On le note det (M).
Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \dfrac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.

Justifier que N est l'inverse de M.

2. On considère l'équation (E) : $\det(M) = 3$.

On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a\ ;\ b)$ solutions de l'équation (E).

a. Vérifier que le couple (6 ; 3) est une solution de (E).

b. Montrer que le couple d'entiers $(a\ ;\ b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a-6) = 5(b-3)$.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie B

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

En utilisant la partie A. déterminer la matrice inverse de Q.

2. Codage avec la matrice Q

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :

Étape 1 : On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Étape 2 : la matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $Y = QX$.

Étape 3 : La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

Étape 4 : À la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape I.

Exemple : JE $\rightarrow X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow$ OF

Le mot JE est codé en le mot OF.
Coder le mot DO.

3. Procédure de décodage

On conserve les mêmes notations que pour le codage.
Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que $Y = QX$.

a. Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$ puis que $\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 \quad [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 \quad [26] \end{cases}$

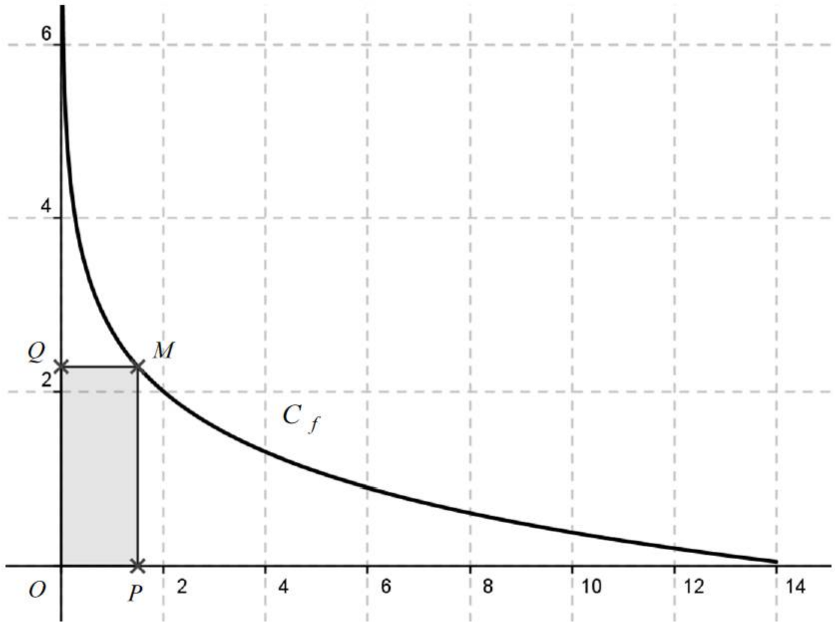
b. En remarquant que $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$, montrer que $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \quad [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \quad [26] \end{cases}$

c. Décoder le mot SO.

EXERCICE 4 (3 points) Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur] 0 ; 14 [par $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

La courbe représentative C_f de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



A tout point M appartenant à C_f on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur C_f
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ? Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.

EXERCICE 5 (5 points) Commun à tous les candidats

On souhaite stériliser une boite de conserve.

Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25°$ C et on la place dans un four à température constante $T_1 = 100°$C.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boite est supérieure à 85°C. Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T, la température en degré Celsius de la boite au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.

Pour n non nul, la valeur T. est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de t à n faire T prend la valeur 0,85 × T + 15 Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boite de conserve au bout de 3 minutes. Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n. on a $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boite est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec : $f(t) = 100 - 75\ \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}$.

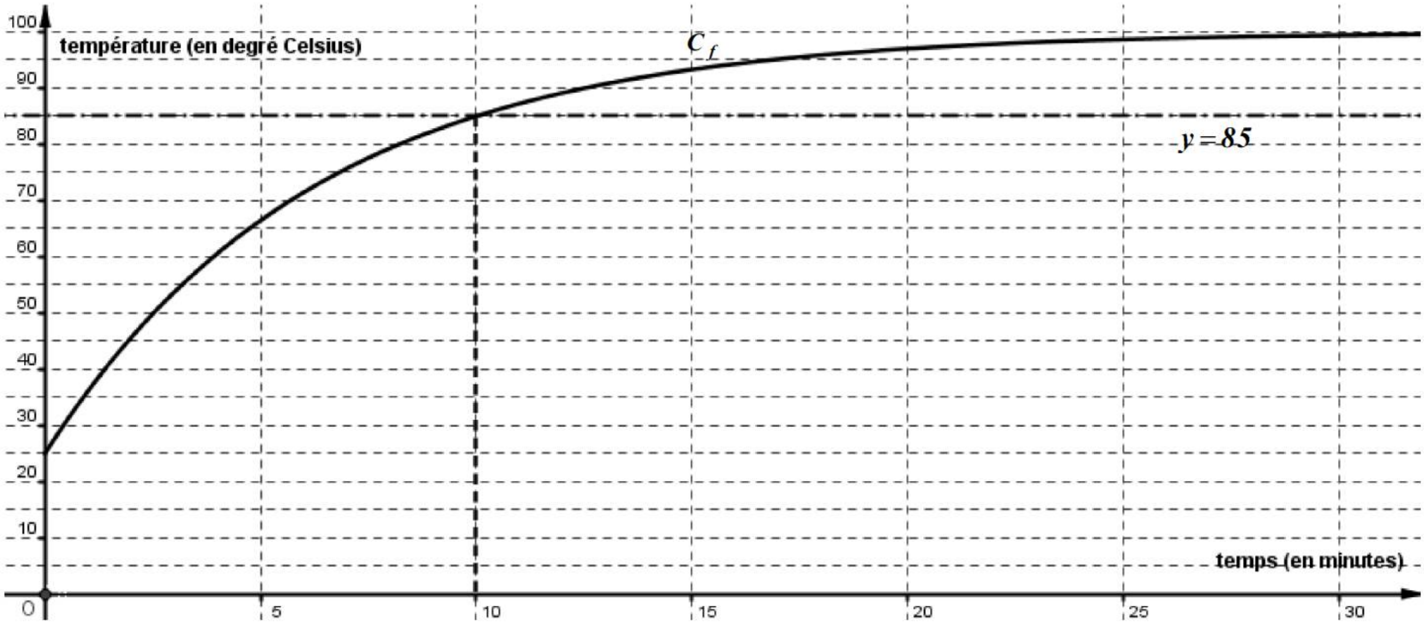
1\. *a*. Étudier le sens de variations de f sur [0 ;+ ∞ [.

b. Justifier que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$.

2\. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

On note A(θ) le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = 0$. $y = 85$ et la courbe représentative C_f de f .

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ si l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine A(θ) est supérieure à 80.

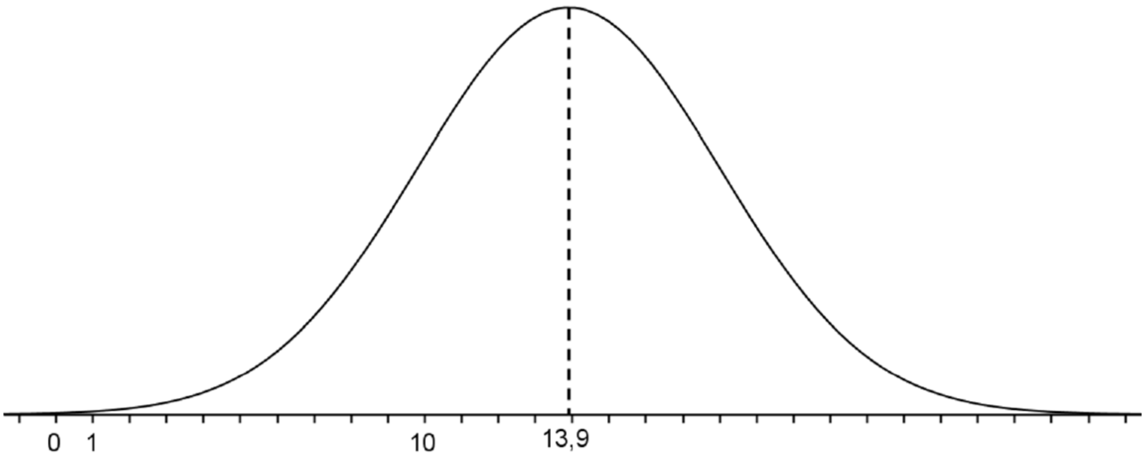


a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe que l'on a A(25) > 80.

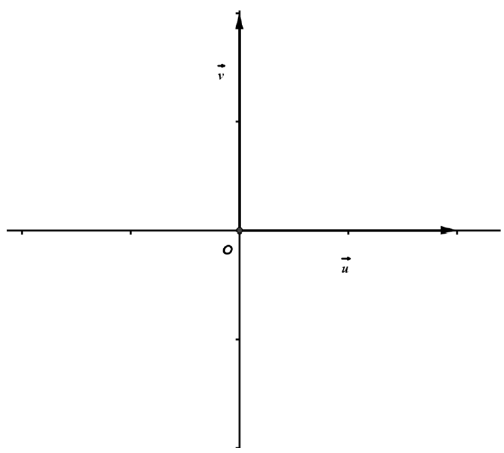
b. Justifier que, pour θ > 10, on a $A(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt$.

c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

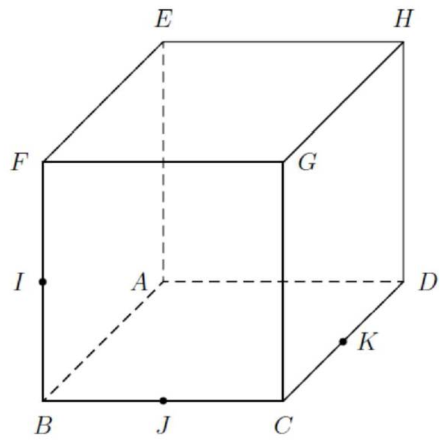
Annexe EXERCICE 1



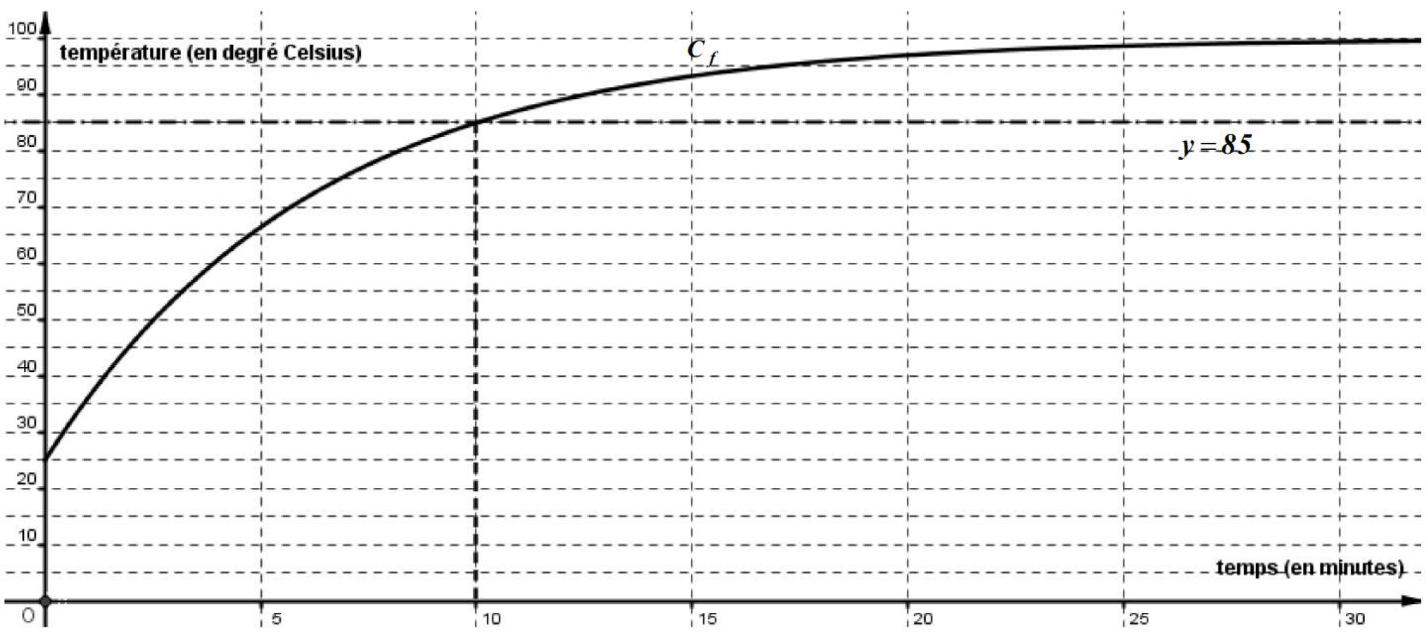
Annexe EXERCICE 2



Annexe EXERCICE 3 non spécialistes



Annexe EXERCICE 5



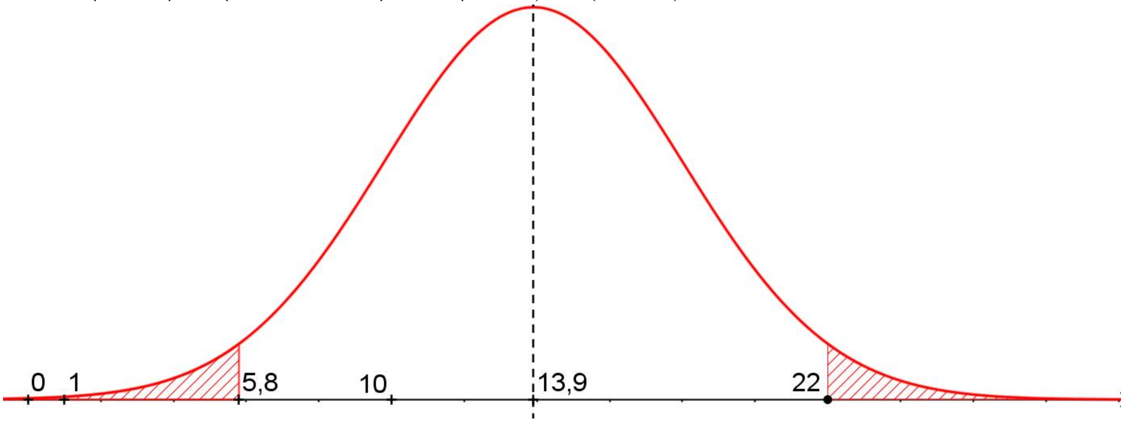
CORRECTION

EXERCICE 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Partie A

1. *a*. P(T ≥ 22) = 0,023. La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 13{,}9$

22 = 13,9 + 8,1 donc P(T ≥ 22) = P(T ≤ 13,9 – 8,1) soit P(T ≥ 22) = P(T ≤ 5,8) = 0,023



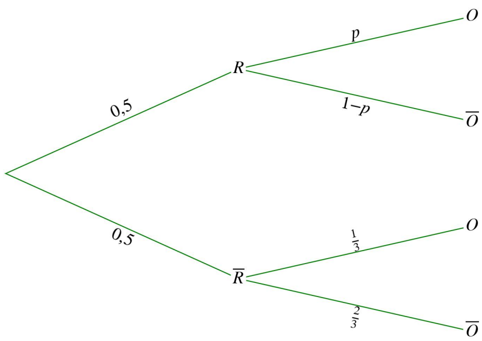
b. P(5,8 ≤ T ≤ 22) = 1 – P(T ≥ 22) – P(T ≤ 5,8) = 1 – 0,023 × 2 = 0,954

P (α – 2 σ ≤ X ≤ α + 2 σ) ≈ 0,95 donc α + 2 σ = 22 soit 2 σ = 22 – 13,9 = 8,1 soit σ ≈ 4,05 donc une valeur approchée de σ au dixième est 4,1.

2. P(X ≥ 18) = 0,159

Partie B

1. Calculs de probabilités



q = p(R ∩ O) + p($\overline{\text{R}}$ ∩ O) soit $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ donc $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$

2. Intervalle de confiance

a. $n = 1500$ donc $n \geq 30$, $f = \frac{625}{1500} \approx 0{,}417$. donc $n\,f = 625$ soit $n\,f \geq 5$ et $n\,(1 - f) = 875$ donc $n\,(1 - f) \geq 5$

un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage est

$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ soit [0,390 ; 0,443].

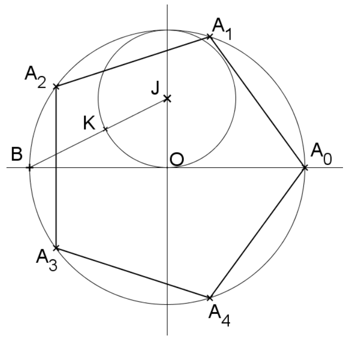
b. Par conséquent $0{,}390 \leq q \leq 0{,}443$ soit $0{,}390 \leq \frac{1}{2}p + \frac{1}{6} \leq 0{,}443$

Soit $0{,}390 - \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2}p \leq 0{,}443 - \frac{1}{6}$ donc $2 \times 0{,}390 - 2 \times \frac{1}{6} \leq p \leq 2 \times 0{,}443 - 2 \times \frac{1}{6}$

En arrondissant au millième, on trouve : 0,446 ≤ p ≤ 0,553

En conséquence, entre 44,6% et 55,3% des jeunes pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

EXERCICE 2 (3 points) Commun à tous les candidats



1. Le cercle **C** de centre J et de rayon coupe le segment [BJ] en un poing K.

Le triangle OBJ est rectangle en O donc d'après le théorème de Pythagore $BO^2 + OJ^2 = BJ^2$ soit

$BJ^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ donc $BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$JK = \frac{1}{2}$ et $K \in [BJ]$ donc BK = BJ – KJ soit $BK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

2. *a.* $OA_2 = 1$ et $(\overrightarrow{OA_0} ; \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}$; $(\overrightarrow{OA_1} ; \overrightarrow{OA_2}) = \frac{2\pi}{5}$ donc $(\overrightarrow{OA_0} ; \overrightarrow{OA_2}) = \frac{4\pi}{5}$

donc, sous forme exponentielle, l'affixe du point A_2 est $e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

b. $BA_2^{\,2} = \left| e^{i\frac{4\pi}{5}} + 1 \right|^2 = \left(1 + \cos\frac{4\pi}{5}\right)^2 + \sin^2\frac{4\pi}{5}$ donc $BA_2^{\,2} = 1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos^2\frac{4\pi}{5} + \sin^2\frac{4\pi}{5}$ or

$\cos^2\frac{4\pi}{5} + \sin^2\frac{4\pi}{5} = 1$ donc $BA_2^{\,2} = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

c. $BA_2^{\,2} = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 + \frac{-\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, d'après le logiciel $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ donc $BA_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ donc

$BA_2 = BK$

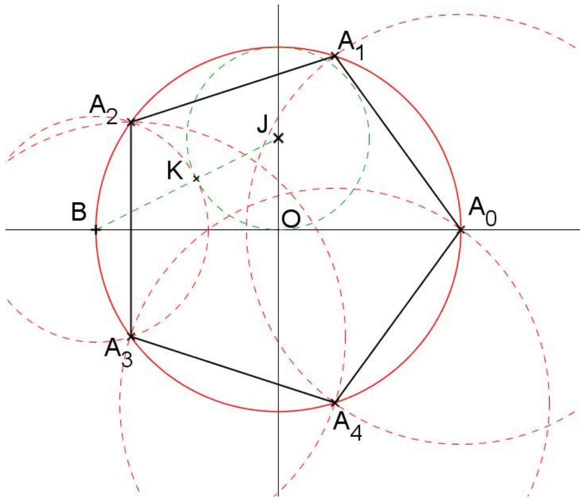
3. Tracer le cercle **C** de centre O de rayon 1, les points A_0, B, J, K milieu de [BJ]

$BK = BA_2$ donc A_2 est un point d'intersection du cercle **C** et du cercle de centre B de rayon BK, le second point d'intersection est A_3

On recommence :

Le cercle de centre A_2 de rayon A_2A_3 coupe le cercle **C** en A_1 et A_3

Le cercle de centre A_3 de rayon A_2A_3 coupe le cercle **C** en A_2 et A_4



EXERCICE 3 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Le point L appartient à (IJ) donc au plan (IJK) donc ((LK) est l'intersection des plans (IJK) et (CDH) ;

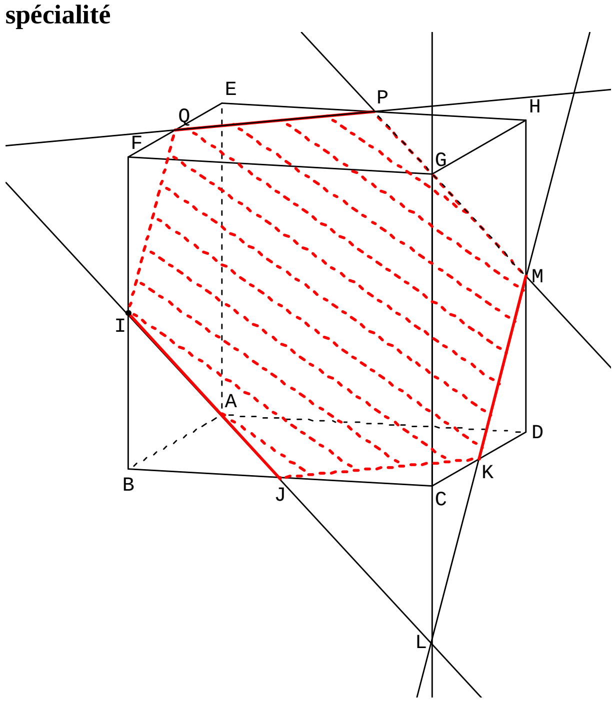
Cette droite coupe ((DH) en M

Les plans (DEH) et (CFG) sont parallèles donc les intersections des plans (DEH) et (CFG) par le plan (IJK) sont deux droites parallèles. Il suffit donc de tracer la parallèle en M à (IJ) pour obtenir la droite intersection des plans (DEH) et (IJK).

Cette droite coupe ([EH] en P

Les plans (ABC) et (FGH) sont parallèles donc les intersections des plans (ABC) et (FGH) par le plan (IJK) sont deux droites parallèles. Il suffit donc de tracer la parallèle en P à (JK) pour obtenir la droite intersection des plans (FGH) et (IJK).

Cette droite coupe [BF] en Q d'où la construction de la section du cube par le plan (IJK).



Partie B

1. A (0 ; 0 ; 0), G(1 ; 1 ; 1),

$L\left(1 ; 1 ; -\frac{1}{2}\right)$, $J\left(1 ; \frac{1}{2} ; 0\right)$ et $K\left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$.

2. $I\left(1 ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{IJ}\left(0 ; \frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{IJ} = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IK} = -1\times\frac{1}{2} + 1\times 1 - 1\times\frac{1}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont orthogonaux.

Les droites (IJ) et (IK) sont deux droites sécantes du plan (IJK) donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

b. Une équation cartésienne du plan (IJK) est de la forme $x + y + z = d$

Ce plan contient le point J donc $d = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Une équation cartésienne du plan (IJK) est $x + y + z = \frac{3}{2}$.

3\. *a.* M a pour coordonnées $(t\,;t\,;t)$ donc $MI^2 = (t-1)^2 + t^2 + \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 = 3t^2 - 2t + 1 - t + \frac{1}{4}$ soit $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$

b. $f(t) = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$ donc $f'(t) = 6t - 3$ donc $f'(t) > 0$ si $t > \frac{1}{2}$ et $f'(t) < 0$ si $t < \frac{1}{2}$ donc f est croissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ et décroissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ donc admet un minimum pour $t = \frac{1}{2}$ donc la distance MI est minimale pour le point $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

4\. *a.* $x + y + z = 3\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ donc N appartient au plan (IJK).

b. N appartient au plan (IJK) et le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) donc les droites (IN) et (AG) sont orthogonales.

N est le point de la droite (AG) obtenu pour $t = \frac{1}{2}$ donc les droites (IN) et (AG) sont sécantes donc la droite (IN) est perpendiculaire à la droite (AG)

$\overrightarrow{IN}\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ et $\overrightarrow{BF}(0;0;1)$ donc $\overrightarrow{IN}\cdot\overrightarrow{BF} = 0$ donc les droites (IN) et (BF) sont orthogonales.

I est le milieu de [BF] donc les droites (IN) et (BF) sont sécantes donc la droite (IN) est perpendiculaire à la droite (BF).

EXERCICES 3 (5 points) **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Partie A

1\. $\begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-5b & 3b-3b \\ -5a+5a & -5b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-5b & 0 \\ 0 & -5b+3a \end{pmatrix}$

$NM = \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 3a-5b & 0 \\ 0 & -5b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc N est l'inverse de M.

2\. *a.* $3\times 6 - 5\times 3 = 18 - 15 = 3$ donc le couple $(6\,;3)$ est une solution de (E).

b. Le couple d'entiers $(a\,;b)$ est solution de (E) $\Leftrightarrow 3a - 5b = 3$ or $3\times 6 - 5\times 3 = 3 \Leftrightarrow 3a - 5b = 3\times 6 - 5\times 3$
$\Leftrightarrow 3a - 3\times 6 - 5b + 5\times 3 = 0 \Leftrightarrow 3(a-6) - 5(b-3) = 0 \Leftrightarrow 3(a-6) = 5(b-3)$.

c. Le couple d'entiers $(a\,;b)$ est solution de (E) $\Leftrightarrow 3(a-6) = 5(b-3)$.
5 divise $3(a-6)$ or 3 et 5 sont premiers entre eux donc 5 divise $a-6$, il existe donc un entier k tel que $a - 6 = 5k$
En remplaçant dans $3(a-6) = 5(b-3)$ alors $3\times 5k = 5(b-3)$ donc $b - 3 = 3k$
$a = 5k + 6$ et $b = 3k + 3$
Réciproquement : si $a = 5k + 6$ et $b = 3k + 3$ alors $3a - 5b = 15k + 18 - 15k - 15 = 3$ donc $(5k+6\,;3k+3)$ est solution de (E)

Les solutions de (E) sont les couples $(5k+6\,;3k+3)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Partie B

1\. En posant $a = 6$ et $b = 3$ alors $3a - 5b = 3$ donc $\det(Q) = 3$ donc $Q^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

2\. **Codage avec la matrice Q**

D $\rightarrow$ 3 et O $\rightarrow$ 14 donc $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$ donc $Y = QX = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 57 \end{pmatrix}$

$60 \equiv 8 \quad [26]$ et $57 \equiv 5 \quad [26]$ donc $R = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ or 8 $\rightarrow$ I et 5 $\rightarrow$ F donc DO est codé en IF.

3. Procédure de décodage

a. Y = Q X donc $3\,Q^{-1}\,Y = 3\,Q^{-1}\,Q\,X$ soit $3\,Q^{-1}\,Y = 3\,\mathrm{Id}\,X = 3\,X$

$3\,X = 3\,Q^{-1}\,Y$ puis que $3\,Q^{-1}\,Y = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,y_1 - 3\,y_2 \\ -5\,y_1 + 6\,y_2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} 3\,x_1 = 3\,y_1 - 3\,y_2 \\ 3\,x_2 = -5\,y_1 + 6\,y_2 \end{cases}$

or $y_1 \equiv r_1 \quad [26]$ et $y_2 \equiv r_2 \quad [26]$ donc $\begin{cases} 3\,x_1 \equiv 3\,r_1 - 3\,r_2 \quad [26] \\ 3\,x_2 \equiv -5\,r_1 + 6\,r_2 \quad [26] \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3\,x_1 \equiv 3\,r_1 - 3\,r_2 \quad [26] \\ 3\,x_2 \equiv -5\,r_1 + 6\,r_2 \quad [26] \end{cases}$ donc $\begin{cases} 9 \times 3\,x_1 \equiv 9 \times 3\,(r_1 - r_2) \quad [26] \\ 9 \times 3\,x_2 \equiv 9 \times (-5\,r_1 + 6\,r_2) \quad [26] \end{cases}$ or $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$

soit $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \quad [26] \\ x_2 \equiv -45\,r_1 + 54\,r_2 \quad [26] \end{cases}$ or – 45 – 7 = – 52 donc $-45 \equiv 7 \quad [26]$ et 54 – 2 = 52 donc $54 \equiv 2 \quad [26]$

donc $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \quad [26] \\ x_2 \equiv 7\,r_1 + 2\,r_2 \quad [26] \end{cases}$

c. S → 18 et G → 6 donc R = $\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$ or $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \quad [26] \\ x_2 \equiv 7\,r_1 + 2\,r_2 \quad [26] \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_1 \equiv 18 - 6 \quad [26] \\ x_2 \equiv 7 \times 18 + 2 \times 6 \quad [26] \end{cases}$

$0 \le x_1 < 26$ donc $x_1 = 12$

$7 \times 18 + 2 \times 6 \equiv 8 \quad [26]$ donc $x_2 \equiv 8 \quad [26]$ or $0 \le x_2 < 26$ donc $x_2 = 8$ donc SG est décodé en MI

EXERCICE 4 (3 points) Commun à tous les candidats

1. M a pour coordonnées $(x\,;\,f(x))$ soit $\left(x\,;\,2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ donc OP $= 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ et OP $= x$

L'aire du rectangle OPMQ est égale à $x \times \left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

Si $x = 2$; cette aire est égale à 4, si $x = 2\,\mathrm{e}$ cette aire est égale à $2\,\mathrm{e}\,(2 - 1)$ soit $2\,\mathrm{e}$

Ces deux aires ne sont pas égales, l'aire du rectangle OPMQ n'est pas constante.

2. Soit $g(x) = x \times \left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) = x\,(2 - \ln x + \ln 2)$

$g'(x) = \left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) + x \times \left(-\frac{1}{x}\right)$

$g'(x) = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \mathrm{e} > \frac{x}{2} \Leftrightarrow x < 2\,\mathrm{e}$

x	0		2 e		14
$g'(x)$		+	0	–	
g	0	↗	2 e	↘	

L'aire du rectangle OPMQ est maximale pour $x = 2\,\mathrm{e}$. $f(2\,\mathrm{e}) = 1$ donc le point M correspondant a pour coordonnées $(2\,\mathrm{e}\,;\,1)$

EXERCICE 5 (5 points) Commun à tous les candidats

Partie A : Modélisation discrète

1. Au bout de 3 minutes, la température de la boite de conserve est de 54 minutes.

n	0	1	2	3
T	25	36,25	45,81	53,94

2. **Initialisation :** $T_0 = 25$ or $100 - 75 \times 0{,}85^0 = 100 - 75 = 25$ donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$

Hérédité : Montrons que, pour tout entier naturel n, si on a $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$ alors $T_{n+1} = 100 - 75 \times 0{,}85^{n+1}$.

$T_{n+1} = 0{,}85\,T_n + 15 = 0{,}85 \times (100 - 75 \times 0{,}85^n) + 15$

$T_{n+1} = 85 - 75 \times 0{,}85^n \times 0{,}85 + 15$ donc $T_{n+1} = 100 - 75 \times 0{,}85^{n+1}$ donc la propriété est héréditaire.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$

3. $\quad \mathrm{T}_n > 85 \Leftrightarrow 100 - 75 \times 0{,}85^n > 85 \Leftrightarrow 15 > 75 \times 0{,}85^n \Leftrightarrow \dfrac{15}{75} > 0{,}85^n \Leftrightarrow 0{,}2 > 0{,}85^n \Leftrightarrow \ln 0{,}2 > n \ln 0{,}85$

$\ln 0{,}85 < 0$ donc $\mathrm{T}_n > 85 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}85}$ or $\dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}85} \approx 9{,}9$ il faut donc attendre 10 minutes pour que la stérilisation débute.

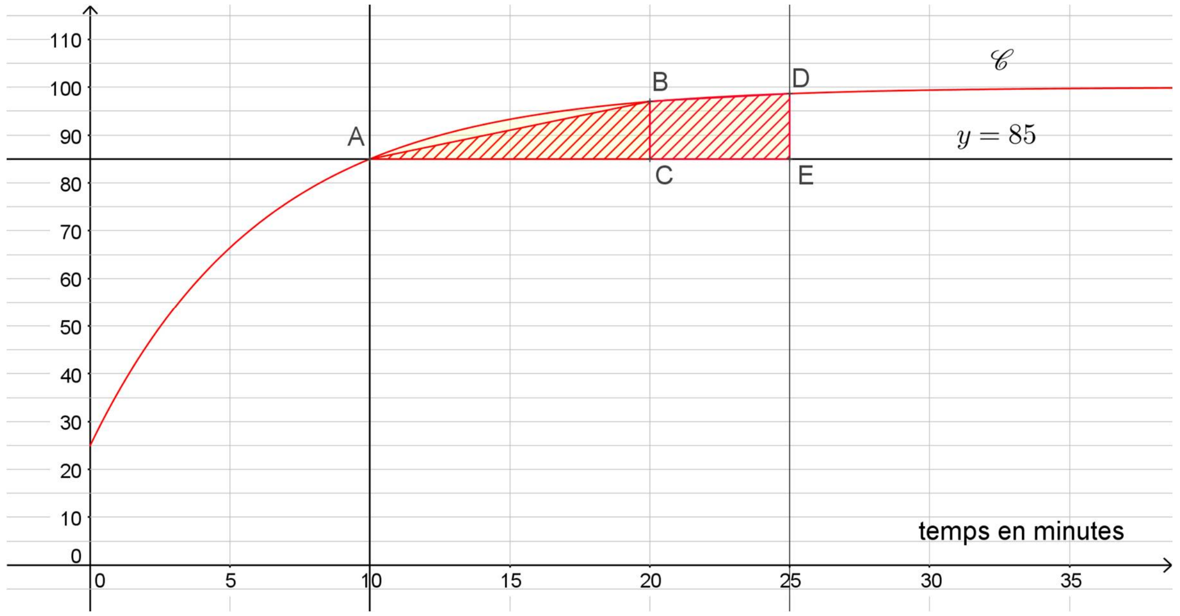
Partie B : Modélisation continue

1. *a.* $\quad f'(t) = -75 \times \dfrac{-\ln 5}{10} \mathrm{e}^{-\frac{\ln t}{10}} \Leftrightarrow f'(t) = 7{,}5 \ln 5\ \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}$

La fonction exponentielle est positive sur R donc $f'(t) > 0$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$, f est croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

b. $\quad f$ est croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$ donc si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq f(10)$ or $f(10) = 85$ donc si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$.

2.



A(25) est supérieure à la somme des aires du triangle ABC, et du trapèze BCDE.
L'aire du triangle ABC est égale à $10 \times (f(20 - 85) = 60$

L'aire du trapèze BCDE est égale à $\dfrac{\mathrm{BC} + \mathrm{DE}}{2} \times 5 = \dfrac{f(10) - 85 + f(20) - 85}{2} \times 5 \approx 64{,}1$ donc $\mathrm{A}(25) > 60 + 64$ donc $\mathrm{A}(25) > 80$.

b. $\quad$ pour $\theta > 10$, $f(\theta) > 85$ donc $\mathrm{A}(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} \left(f(\theta) - 85 \right) \mathrm{d}t = \int_{10}^{\theta} \left(100 - 75\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} - 85 \right) \mathrm{d}t$

$\mathrm{A}(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} \left(15 - 75\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} \right) \mathrm{d}t = \int_{10}^{\theta} 15\,\mathrm{d}t - 75 \int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$

$\mathrm{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \displaystyle\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$.

c. $\quad \mathrm{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \left[-\dfrac{10}{\ln 5} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} \right]_{10}^{\theta}$

$\mathrm{A}(20) = 15(20 - 10) - 75 \left[-\dfrac{10}{\ln 5} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} \right]_{10}^{20}$ donc $\mathrm{A}(20) = 150 - 75 \left[-\dfrac{10}{\ln 5} \mathrm{e}^{-2\ln 5} + \dfrac{10}{\ln 5} \mathrm{e}^{-\ln 5} \right]_{10}^{20}$

$\mathrm{A}(20) = 150 - \dfrac{75}{\ln 5} \left(-\dfrac{10}{25} + \dfrac{10}{5} \right) = 150 - \dfrac{120}{\ln 5}$

$\mathrm{A}(20) \approx 75{,}44$ donc $\mathrm{A}(20) < 80$.
La stérilisation n'est pas finie au bout de 20 minutes