Polynésie juin 2016

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'*est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

1. Proposition 1
Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

2. On considère la suite u définie, pour $n \geq 1$, par :

$$u_n = \frac{1}{n}\,\text{pgcd}(20\,;\,n).$$

Proposition 2
La suite (u_n) est convergente.

3. Proposition 3
Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a $A \times B = B \times A$.

4. Un mobile peut occuper deux positions A et B. À chaque étape, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.
Pour tout entier naturel n, on note :

— A_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position a à l'étape n » et a_n sa probabilité.
— B_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position B à l'étape n » et b_n sa probabilité.
— X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier nature n, $X_{n+1} = M \times X_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Proposition 4
La probabilité $P_{A_n}(B_{n+1})$ vaut 0,45.

Proposition 5
Il existe un état initial $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1, autrement dit tel que $b_1 = 3\,a_1$.

CORRECTION

1. Proposition 1 VRAIE
Si le chiffre des unités de $n^2 + n$ est égal à 4 alors il existe un entier naturel k tel que $n^2 + n = 10\,k + 4$ soit $n^2 + n \equiv 4$ modulo 10

n est congru modulo 10 à	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 est congru modulo 10 à	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$n^2 + n$ est congru modulo 10 à	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

On n'a jamais $n^2 + n \equiv 4$ modulo 10 donc le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

2. Proposition 2 VRAIE
$20 = 2^2 \times 5$ donc pgcd $(20\,;\,n) \in \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,5\}$ donc $1 \leq$ pgcd $(20\,;\,n) \leq 5$ donc $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{5}{n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. La suite (u_n) est convergente.

3. Proposition 3 FAUSSE
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on n'a pas $A \times B = B \times A$.

4. Proposition 4 VRAIE
Pour tout entier nature n, $X_{n+1} = M \times X_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ donc $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}55\,a_n + 0{,}3\,b_n \\ 0{,}45\,a_n + 0{,}7\,b_n \end{pmatrix}$

$P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1})\,P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})\,P(B_n) = P_{A_n}(B_{n+1})\,a_n + P_{B_n}(B_{n+1})\,b_n$ par comparaison : $P_{A_n}(B_{n+1}) = 0{,}45$.

Proposition 5 FAUSSE
$b_1 = 0{,}55\,a_0 + 0{,}3\,b_0$ et $a_1 = 0{,}45\,a_0 + 0{,}7\,b_0$ avec $a_0 + b_0 = 1$ et $a_0 \geq 0$ et $b_0 \geq 0$
$b_1 = 3\,a_1$ donc $0{,}55\,a_0 + 0{,}3\,b_0 = 3\,(0{,}45\,a_0 + 0{,}7\,b_0)$ soit $0{,}8\,a_0 + 1{,}8\,b_0 = 0$ donc $0{,}8\,a_0 = -1{,}8\,b_0$
$a_0 \geq 0$ et $b_0 \geq 0$ donc il est impossible d'avoir $0{,}8\,a_0 = -1{,}8\,b_0$
Il n'existe pas d'état initial $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1.