Métropole La Réunion septembre 2016

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par : $v_1(t) = 5 \times \dfrac{e^{0,3t} - 1}{e^{0,3t} + 1}$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction v_1.

2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement.

On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en $m.s^{-1}$) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.

On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 $m.s^{-1}$.

Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.

On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en $m.s^{-1}$), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $v_2(t) = 32,7\,(1 - e^{-0,3t})$

1. Quelle est la vitesse, exprimée en $m.s^{-1}$, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 $m.s^{-1}$.

2. Résoudre l'équation $v_2(t) = 30$ $m.s^{-1}$. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.

3. On sait que la chute du colis dure 20 secondes. On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $d(T) = \displaystyle\int_0^T v_2(t)\,dt$.

a. Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle [0 ; 20], $d(T) = 109\,(e^{-0,3T} + 0,3T - 1)$.

b. Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.

4. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.

CORRECTION

EXERCICE 4 Commun à tous les candidats 5 POINTS

Partie 1

1. $v_1(t) = 5 \times \dfrac{3e^{0,3t}(e^{0,3t} + 1) - 3e^{0,3t}(e^{0,3t} - 1)}{(e^{0,3t} + 1)^2} = \dfrac{30}{(e^{0,3t} + 1)^2}$ donc $v'_1(t) > 0$ sur [0 ; + ∞ [.

v_1 est croissante sur [0 ; + ∞ [.

2. $v_1(t) = 5 \times \dfrac{e^{0,3t} - 1}{e^{0,3t} + 1} = 5\dfrac{e^{-0,3t}(e^{0,3t} - 1)}{e^{-0,3t}(e^{0,3t} + 1)} = 5 \times \dfrac{1 - e^{-0,3t}}{1 + e^{-0,3t}}$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-3t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} v_1(t) = 5$

La fonction v_1 est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [et $\lim\limits_{t \to +\infty} v_1(t) = 5$ donc pour tout $t \geq 0, v_1(t) \leq 5$

Le colis ne risque pas d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.

On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en $m.s^{-1}$), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $v_2(t) = 32,7\,(1 - e^{-0,3t})$

1. $v_2(10) = 32,7\,(1 - e^{-0,3 \times 10}) \approx 31,1$ $m.\,s^{-1}$.

2. $v_2(t) = 30$ $m.\,s^{-1}$ $\Leftrightarrow 32,7\,(1 - e^{-0,3t}) = 30 \Leftrightarrow 32,7 - 30 = 32,7 \Leftrightarrow e^{-0,3t} = \dfrac{2,7}{32,7} \Leftrightarrow -0,3\,t = \ln\left(\dfrac{2,7}{32,7}\right)$

soit $t = -\dfrac{\ln\left(\dfrac{2,7}{32,7}\right)}{0,3}$ donc $t \approx 8,3$ s donc au bout de 8,3 s la vitesse du colis, après avoir été lâché par le passager, est de 30 $m.\,s^{-1}$.

3. *a.* Pour tout réel T de l'intervalle [0 ; 20], $d(T) = \displaystyle\int_0^T v_2(t)\,dt = \left[32,7\left(t - \frac{1}{-0,3}e^{-0,3t}\right)\right]_0^T$,

$\dfrac{32,7}{0,3} = 109$ ou $32,7 = 109 \times 0,3$ donc, $d(T) = 32,7\left(T + \dfrac{1}{0,3}e^{-0,3T}\right) - 32,7\left(\dfrac{1}{0,3}e^0\right) = 109 \times 0,3\,T + 109\,e^{-0,3T} - 109$

donc $d(T) = 109\,(e^{-0,3T} + 0,3\,T - 1)$

b. T = 20 donc la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol, est $d(20) = 109\,(\,e^{-6} + 5)$ soit $d(20) \approx 545\ m$.

4. Il faut résoudre l'équation $d(\mathrm{T}) = 700$
$d'(\mathrm{T}) = v_2\,(\mathrm{T})$ or $v_2\,(\mathrm{T}) > 0$ pour tout T de [0 ; 20] donc la fonction d est définie, continue strictement croissantes sur [0 ; 20],
$d(0) = 0$, et $\lim\limits_{t \to +\infty} d\,(T) = +\infty$ donc l'équation $d(\mathrm{T}) = 700$ admet une seule solution sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$.

$d(24{,}7) \approx 698{,}7$ et $d(24{,}8) \approx 702$ donc $24{,}7 < \mathrm{T} < 702$.