ENONCE

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

On note $A_0 = A$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$.

1. a. Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f.

b. Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\dfrac{1}{2}$.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n\ e^{i\frac{n\pi}{3}}$.

b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $(O ; \vec{u})$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.

2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

3. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $(O ; \vec{u})$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

CORRECTION

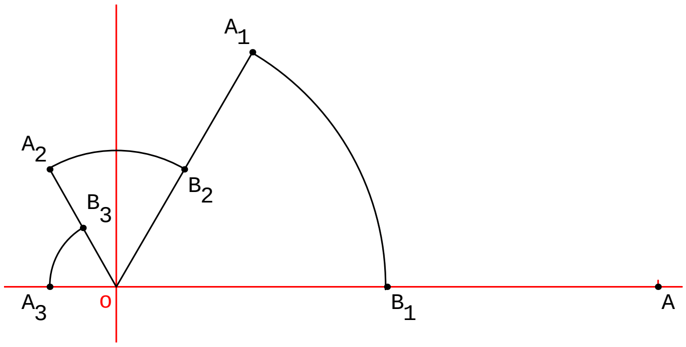
1. *a.* $z' - 0 = k\ e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 0) \Leftrightarrow z' = k\ e^{i\frac{\pi}{3}} z$

b. f est la composée de l'homothétie h de centre O de rapport $\dfrac{1}{2}$, et de la rotation r de centre O d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Par h, A est transformé en B_1, qui est transformé par r en A_1

Par h, A_1 est transformé en B_2, qui est transformé par r en A_2

Par h, A_2 est transformé en B_3, qui est transformé par r en A_3.



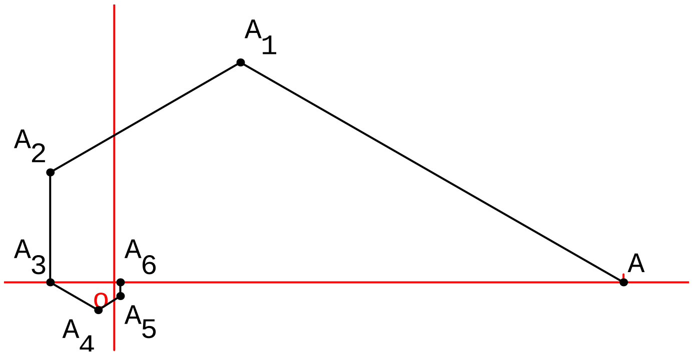
2. *a.* Vérification, si $n = 0$, $z_0 = 1 = k^0\ e^{0\,i} = k^0\ e^{i\frac{0\pi}{3}}$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Montrons que la propriété est héréditaire, c'est-à-dire que pour tout n, $z_n = k^n\ e^{i\frac{n\pi}{3}} \Rightarrow z_{n+1} = k^{n+1}\ e^{i\frac{(n+1)\pi}{3}}$

$z_{n+1} = k\ e^{i\frac{\pi}{3}} z_n$ or $z_n = k^n\ e^{i\frac{n\pi}{3}}$ donc $z_{n+1} = k^{n+1}\ e^{i\frac{(n+1)\pi}{3}}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.



b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $A_n \neq O$ donc $z_n \neq 0$; $A_n \in (O ; \vec{u}) \Leftrightarrow \arg(z_n) = 0 + p\,\pi$ $(p \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \dfrac{n\,\pi}{3} = p\,\pi$

$n \in$ N donc $A_n \in (O ; \vec{u}) \Leftrightarrow n = 3\,p$ $(p \in \mathbb{N})$

Partie B

1. $2008 = 8 \times 251$

251 est compris entre 15^2 et 16^2 et n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à 15 (2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13) donc est premier. $2008 = 2^3 \times 251$

2. Soit une décomposition en produit de facteurs premiers de k, k^6 est un multiple de 2008 donc 2 et 251 figurent dans cette décomposition donc $k = 2 \times 251 \times n$

$k^6 = 2^6 \times 251^6 \times n^6$

k^6 est le plus petit multiple de 2008 si et seulement si $n = 1$: alors $k = 2 \times 251 = 502$

3. $A_n \in (O\,;\vec{u}) \Leftrightarrow n = 3p$ ($p \in \mathbb{N}$). L'abscisse de A_n est alors $z_n = k^n$

L'abscisse de A_n est un entier multiple de 2008 $\Leftrightarrow k^n$ est un multiple de 2008 or $n = 3p$ ($p \in \mathbb{N}$) $\Leftrightarrow k^{6p}$ est un multiple de 2008.

$k^0 = 1$ donc ceci est impossible pour $p = 0$, si $p = 1$, k^6 est un multiple de 2008 $\Leftrightarrow k$ est un multiple de 502 d'après la question précédente. Si $p \geq 2$, $k^{6p} = k^{6(p-1)} \times k^6$ or k^6 est un multiple de 2008 donc k^{6p} est un multiple de 2008

Le point A_n appartient à la demi droite $(O\,;\vec{u})$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 si et seulement si k est un multiple de 502 et $n = 3p$ ($p \in \mathbb{N}^*$).