Lois de probabilités

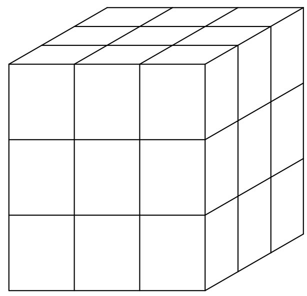
▷ **Exercice 1.** On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On marque 10 points si on a tiré l'as de cœur, 5 points si on a tiré un autre as, 3 points si on a tiré une figure (Valet, Dame ou Roi) et aucun point dans tous les autres cas. On définit ainsi une variable aléatoire X. Donner la loi de probabilité de X, calculer son espérance et son écart-type.

x_i	0	3	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$	$\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

- $\mathbb{E}(X) = \sum p_i x_i = \dfrac{1}{2} \times 0 + \dfrac{3}{8} \times 3 + \dfrac{3}{32} \times 5 + \dfrac{1}{32} \times 10 = \dfrac{61}{32}$
- $\mathbb{V}(X) = \sum p_i x_i^2 - (\mathbb{E}(X))^2 = \dfrac{1}{2} \times 0^2 + \dfrac{3}{8} \times 3^2 + \dfrac{3}{32} \times 5^2 + \dfrac{1}{32} \times 10^2 - \left(\dfrac{61}{32}\right)^2 = \dfrac{283}{32} - \left(\dfrac{61}{32}\right)^2 = \dfrac{5335}{1024} \simeq 5,21.$

  Ainsi $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\dfrac{5335}{1024}} \simeq 2,28$

▷ **Exercice 2.** On fabrique un gros cube en agglomérant 27 petits cubes (voir figure ci-dessous). On peint en rouge toutes les faces du gros cube, puis on sépare de nouveau les 27 petits qui ont donc certaines de leurs faces peintes en rouge. On tire au hasard un petit cube et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de faces peintes en rouge sur le petit cube tiré. Donner la loi de probabilité de X, calculer son espérance et son écart-type.



$X(\Omega) = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 \}$

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27} = \frac{2}{9}$	$\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum p_i x_i \\ &= \frac{1}{27} \times 0 + \frac{2}{9} \times 1 + \frac{4}{9} \times 2 + \frac{8}{27} \times 3 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \sum p_i x_i^2 - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{1}{27} \times 0^2 + \frac{2}{9} \times 1^2 + \frac{4}{9} \times 2^2 + \frac{8}{27} \times 3^2 - 2^2 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

donc $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

▷ **Exercice 3.** *Loterie*

Partie A

Une roue de loterie comporte trois secteurs, portant respectivement les numéros 1, 2 et 3. Quand on fait tourner la roue, un repère indique le numéro sortant. La probabilité de sortie du numéro 2 est double de la probabilité du numéro 1, et la probabilité du numéro 3 est triple de celle du numéro 1. Calculer les probabilités de sortie respectives des trois numéros.

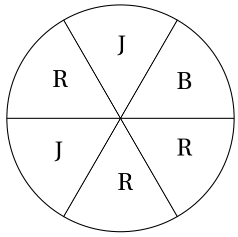
$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = 1$ avec $P(\{2\}) = 2P(\{1\})$ et $P(\{3\}) = 3P(\{1\})$ donc $P(\{1\}) + 2P(\{1\}) + 3P(\{1\}) = 1 \iff P(\{1\}) = \dfrac{1}{6}$

d'où finalement $\begin{cases} P(\{1\}) = \frac{1}{6} \\ P(\{2\}) = \frac{1}{3} \\ P(\{3\}) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Partie B

La roue est maintenant divisée en six secteurs égaux ayant chacun la même probabilité de s'arrêter devant le repère :

- 2 secteurs sont jaunes (J sur la figure)
- 3 secteurs sont rouges (R sur la figure)
- 1 secteur est bleu (B sur la figure).



La règle du jeu est la suivante : pour participer au jeu, le joueur doit miser une certaine somme et si le jaune sort, il gagne 20€, si le bleu sort, il gagne 30€, si le rouge sort, il ne gagne rien.

1. Dans cette question, on suppose que la mise est de 10€. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque arrêt de la roue associe le gain effectif (positif ou négatif) du joueur.

a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X(\Omega) = \{ -10 \; ; \; 10 \; ; \; 20 \}$. On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	-10	10	20
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b) Calculer son espérance mathématique.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum p_i x_i \\ &= \frac{1}{2} \times (-10) + \frac{1}{3} \times 10 + \frac{1}{6} \times 20 \\ &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

2. L'organisateur du jeu ne souhaite pas que l'espérance de gain du joueur soit positive. A quelle valeur minimale, exprimée par un nombre entier d'euros, doit-il fixer le montant de la mise ?

Soit m la mise en euros. $X(\Omega) = \{ -m \; ; \; 20 - m \; ; \; 30 - m \}$. La loi de probabilité de X devient :

x_i	$-m$	$20 - m$	$30 - m$
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi $\mathbb{E}(X) < 0 \iff \frac{1}{2} \times (-m) + \frac{1}{3} \times (20 - m) + \frac{1}{6} \times (30 - m) < 0 \iff -m + \frac{35}{3} < 0 \iff m > \frac{35}{3}$

$\frac{35}{3} \approx 11,67$ donc il faut que la mise soit supérieure ou égale à 12 €.

▷ **Exercice 4.** Une urne contient 10 boules blanches et n boules noires ($n \geq 2$). Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Si on tire une boule blanche on gagne 2 euros, si on tire une boule noire on perd 3 euros. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.

1. Donner la loi de probabilité de X.

$X(\Omega) = \{ -3 \; ; \; 2 \}$

x_i	-3	2
$p(X = x_i)$	$\frac{n}{10+n}$	$\frac{10}{10+n}$

2. Calculer l'espérance de X.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum p_i x_i \\ &= \frac{n}{10+n} \times (-3) + \frac{10}{10+n} \times 2 \\ &= \frac{20 - 3n}{10 + n}\end{aligned}$$

3. Pour combien de boules noires dans l'urne le jeu est-il favorable au joueur ?

$\mathbb{E}(X) > 0 \iff \frac{20 - 3n}{10 + n} > 0 \iff 20 - 3n > 0 \iff n < \frac{20}{3} \approx 6,67$ donc pour un nombre de boules noires inférieur ou égal à 6, le jeu est favorable au joueur.