Amérique du Sud novembre 2015

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :
• en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
• chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
• chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.
Pour tout entier naturel n, on note :
• R_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010 + n,
• C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010 + n.
On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\,U_n$.

b. Calculer U_1. En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.

2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0.

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P et on la notera P^{-1}.

4. *a.* On pose $\Delta = P^{-1} M P$. Calculer Δ à l'aide de la calculatrice.

b. Démontrer que : $M = P \Delta P^{-1}$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = P \Delta^n P^{-1}$.

5. *a.* On admet que le calcul matriciel précédent donne : $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $R_n = 50 \times 0,85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en conclure pour la population étudiée ?

6. *a.* On admet que (R_n) est décroissante et que (C_n) est croissante.
Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il affiche le nombre d'années au bout duquel la population urbaine dépassera la population rurale.

b. En résolvant l'inéquation d'inconnue n, $50 \times 0,85^n + 40 < 80 - 50 \times 0,85^n$, retrouver la valeur affichée par l'algorithme.

Annexe

Entrée :	n, R et C sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 R prend la valeur 90 C prend la valeur 30

Traitement :	Tant que ...... faire
	    n prend la valeur ...
	    R prend la valeur $50 \times 0,85^n + 40$
	    C prend la valeur ....
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher n

CORRECTION

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.

a. Chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville (donc 90 % reste en zone rurale) et 5 % des citadins émigrent en zone rurale donc $R_{n+1} = 0,05\,C_n + 0,90\,R_n$

Chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville et 5 % des citadins émigrent en zone rurale (donc 95 % restent en ville) donc $C_{n+1} = 0,95\,C_n + 0,10\,R_n$

$M\,U_n = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9\,R_n + 0,05\,C_n \\ 0,1\,R_n + 0,95\,C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix}$ donc pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\,U_n$.

b. $U_1 = M\,U_0$ donc $U_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,5 \\ 37,5 \end{pmatrix}$.

Le nombre de ruraux est de 82 500 et le nombre de citadins de 37 500 en 2011.

2. Pour tout entier naturel n non nul, $U_{n+1} = M\,U_n$ donc $U_n = M^n\,U_0$.

3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P.

4. *a.* $\Delta = P^{-1}\,M\,P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}$

b. $\Delta = P^{-1}\,M\,P$ donc $P\,\Delta\,P^{-1} = P\,P^{-1}\,M\,P\,P^{-1} = M$ donc $M = P\,\Delta\,P^{-1}$.

c. **Initialisation :** $n = 1$, $M = P\,\Delta\,P^{-1}$ donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : montrons pour tout n de $\mathbb{N}^*$ que si $M^n = P\,\Delta^n\,P^{-1}$ alors $M^{n+1} = P\,\Delta^{n+1}\,P^{-1}$.

$M^{n+1} = M \times M^n = P\,\Delta\,P^{-1}\,P\,\Delta^n\,P^{-1}$ or $P\,P^{-1} = I_2$ donc $M^{n+1} = P\,\Delta\,\Delta^n\,P^{-1}$ donc $M^{n+1} = P\,\Delta^{n+1}\,P^{-1}$.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = P\,\Delta^n\,P^{-1}$

5. *a.* $U_n = M^n\,U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0,85^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0,85^n \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0,85^n & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0,85^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$

$U_n = M^n\,U_0$ donc $R_n = \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0,85^n\right)\times 90 + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0,85^n\right)\times 30 = 30 + 60 \times 0,85^n + 10 - 10 \times 0,85^n$

$R_n = 40 + 50 \times 0,85^n$

La population est constante et égale à 120 donc $R_n + C_n = 120$ donc $C_n = 120 - R_n = 80 - 50 \times 0,85^n$.

b. $-1 < 0,85 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,85^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 40$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 80$.

A long terme 40 000 habitants soit un tiers de cette population habitera à la campagne et 80 000 habitants soit deux tiers en ville.

6. *a.*

Entrée :	n, R et C sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 R prend la valeur 90 C prend la valeur 30
Traitement :	Tant que **R ≥ C**. faire n prend la valeur ***n* + 1** R prend la valeur $50 \times 0,85^n + 40$ C prend la valeur **120 – R (ou C prend la valeur 80 – 50 × $0,85^n$)** Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

b. $50 \times 0,85^n + 40 < 80 - 50 \times 0,85^n \Leftrightarrow 50 \times 0,85^n + 50 \times 0,85^n < 40 + 80 \Leftrightarrow 100 \times 0,85^n < 120 \Leftrightarrow 0,85^n < \frac{120}{100}$

$n \ln 0,85 < \ln 1,2 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 1,2}{\ln 0,85}$ ($\ln 0,85 < 0$) donc $n \geq 6$