Pondichéry mai 2018

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

La température du four est exprimée en degré Celsius (° C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70° C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Partie A

Pour un nombre entier naturel n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1000$.

La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

```
T ← 1000
Pour i allant de 1 à n
T ← 0,82 × T + 3,6
Fin Pour
```

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.

2. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.

3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Partie B

Dans cette partie, on note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.

La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par :

$$f(t) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + b$$

où a et b sont deux nombres réels.

On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t) + \frac{1}{5} f(t) = 4$.

1. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement, la température du four est de 1000 °C, c'est-à-dire que $f(0) = 1000$.

2. Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif t : $f(t) = 980\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20$.

a. Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.

b. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$. En déduire son tableau de variations complet.

c. Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

3. La température moyenne (en degré Celsius) du four entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par : $\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

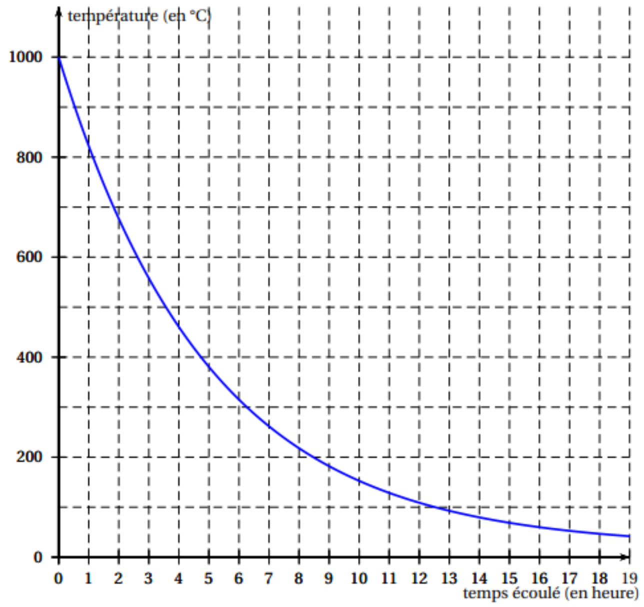
a. À l'aide de la représentation graphique de f ci-dessous, donner une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement. Expliquer votre démarche.

b. Calculer la valeur exacte de cette température moyenne θ et en donner la valeur arrondie au degré Celsius.

4. Dans cette question, on s'intéresse à l'abaissement de température (en degré Celsius) du four au cours d'une heure, soit entre deux instants t et $(t + 1)$. Cet abaissement est donné par la fonction d définie, pour tout nombre réel t positif, par : $d(t) = f(t) - f(t + 1)$.

a. Vérifier que, pour tout nombre réel t positif : $d(t) = 980\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$.

b. Déterminer la limite de $d(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Quelle interprétation peut-on en donner ?



EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$.

1. On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = j\,a$, $b' = j\,b$ et $c' = j\,c$ où. j est le nombre complexe $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

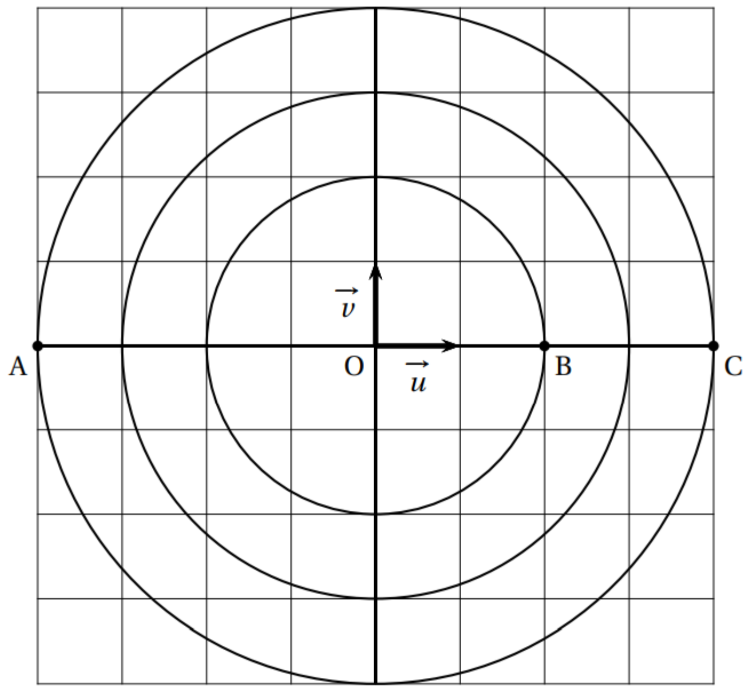
a. Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de j.
En déduire les formes algébriques et exponentielles de a', b' et c'.

b. Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique fourni en Annexe.
Placer les points A′, B′ et C′ sur ce graphique.

2. Montrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.

3. On note M le milieu du segment [A′C], N le milieu du segment [C′C] et P le milieu du segment [C′A].
Démontrer que le triangle MNP est isocèle.

ANNEXE

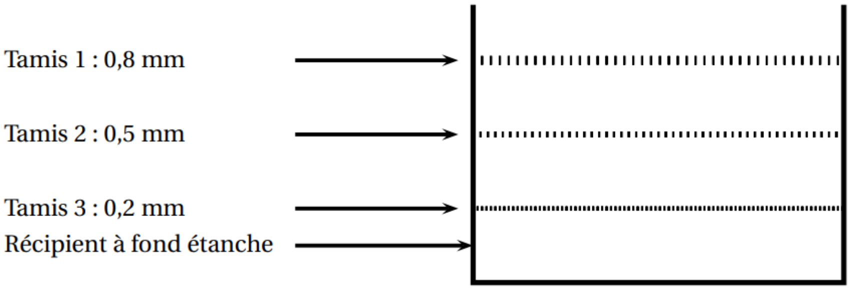


EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités.
Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».
Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Partie A

Pour calibrer le sucre en fonction de la taille de ses cristaux, on le fait passer au travers d'une série de trois tamis positionnés les uns au-dessus des autres et posés sur un récipient à fond étanche. Les ouvertures des mailles sont les suivantes :



Les cristaux de sucre dont la taille est inférieure à 0,2 mm se trouvent dans le récipient à fond étanche à la fin du calibrage. Ils seront conditionnés dans des paquets portant le label « sucre extra fin ».

1. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation U. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_U qui suit la loi normale de moyenne $\mu_U = 0{,}58$ mm et d'écart type $\sigma_U = 0{,}21$ mm.

a. Calculer les probabilités des évènements suivants : $X_U < 0{,}2$ et $0{,}5 \leq X_U < 0{,}8$.

b. On fait passer 1 800 grammes de sucre provenant de l'exploitation U au travers de la série de tamis.

Déduire de la question précédente une estimation de la masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche et une estimation de la masse de sucre récupérée dans le tamis 2.

2. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation V. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_V qui suit la loi normale de moyenne $\mu_V = 0{,}65$ mm et d'écart type σ_V à déterminer.

Lors du calibrage d'une grande quantité de cristaux de sucre provenant de l'exploitation V, on constate que 40 % de ces cristaux se retrouvent dans le tamis 2.

Quelle est la valeur de l'écart type σ_V de la variable aléatoire X_V ?

Partie B

Dans cette partie, on admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et que 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin.

On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.

On considère les évènements suivants :

• U : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U »;

• V : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V »;

• E : « Le paquet porte le label "extra fin" ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V, sans mélanger les sucres des deux exploitations.

a. Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?

b. Sachant qu'un paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?

2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?

Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

Partie C

1. L'entreprise annonce que 30 % des paquets de sucre portant le label « extra fin» qu'elle conditionne contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

Avant de valider une commande, un acheteur veut vérifier cette proportion annoncée. Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise.

Parmi ces paquets, 30 contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

A-t-il des raisons de remettre en question l'annonce de l'entreprise ?

2. L'année suivante, l'entreprise déclare avoir modifié sa production. L'acheteur souhaite estimer la nouvelle proportion de paquets de sucre provenant de l'exploitation U parmi les paquets portant le label « extra fin ».

Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets 42 % contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, de la nouvelle proportion de paquets labellisés « extra fin » contenant du sucre provenant de l'exploitation U.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (2 ; 1; 4), (4 ; – 1 ; 0), (0 ; 3 ; 2) et (4 ; 3 ; – 2).

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2. Soit M un point de la droite (CD).

a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées (3 ; 3 ; – 1).

Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.

3. *a.* Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

À toute lettre de l'alphabet on associe un nombre entier x compris entre 0 et 25 comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le « chiffre de RABIN » est un dispositif de cryptage asymétrique inventé en 1979 par l'informaticien Michael RABIN.

Alice veut communiquer de manière sécurisée en utilisant ce cryptosystème. Elle choisit deux nombres premiers distincts p et q. Ce couple de nombres est sa clé privée qu'elle garde secrète.

Elle calcule ensuite $n = p \times q$ et elle choisit un nombre entier naturel B tel que $0 \leq B \leq n - 1$.

Si Bob veut envoyer un message secret à Alice, il le code lettre par lettre.

Le codage d'une lettre représentée par le nombre entier x est le nombre y tel que : $y \equiv x\,(x + B)\ [n]$ avec $0 \leq y \leq n$.

Dans tout l'exercice on prend $p = 3$, $q = 11$ donc $n = p \times q = 33$ et $B = 13$.

Partie A : Cryptage

Bob veut envoyer le mot « NO » à Alice.

1. Montrer que Bob code la lettre « N » avec le nombre 8.

2. Déterminer le nombre qui code la lettre « O ».

Partie B : Décryptage

Alice a reçu un message crypté qui commence par le nombre 3.

Pour décoder ce premier nombre, elle doit déterminer le nombre entier x tel que : $x\,(x + 13) \equiv 3\ [33]$ avec $0 \leq x \leq 26$.

1. Montrer que $x\,(x + 13) \equiv 3\ [33]$ équivaut à $(x + 23)^2 \equiv 4\ [33]$.

2. *a.* Montrer que si $(x + 23)^2 \equiv 4\ [33]$ alors le système d'équations $\begin{cases} (x+23)^2 \equiv 4 & [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 & [11] \end{cases}$ est vérifié.

b. Réciproquement, montrer que si $\begin{cases} (x+23)^2 \equiv 4 & [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 & [11] \end{cases}$ alors $(x + 23)^2 \equiv 4\ [33]$.

c. En déduire que $x\,(x + 13) \equiv 3\ [33] \Leftrightarrow \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 1 & [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 & [11] \end{cases}$

3. *a.* Déterminer les nombres entiers naturels a tels que $0 \leq a < 3$ et $a^2 \equiv 1\ [3]$.

b. Déterminer les nombres entiers naturels b tels que $0 \leq b < 11$ et $b^2 \equiv 4\ [11]$.

4. *a.* En déduire que $x(x + 13) \equiv 3\ [33]$ équivaut aux quatre systèmes suivants :

$\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases}$

b. On admet que chacun de ces systèmes admet une unique solution entière x telle que $0 \leq x < 33$.

Déterminer, sans justification, chacune de ces solutions.

5. Compléter l'algorithme en Annexe pour qu'il affiche les quatre solutions trouvées dans la question précédente.

6. Alice peut-elle connaître la première lettre du message envoyé par Bob ?

Le « chiffre de RABIN » est-il utilisable pour décoder un message lettre par lettre ?

ANNEXE

```
Pour ...... allant de ......à .......
Si le reste de la division de ....... par ....... est égal à ....... alors
Afficher .......
Fin Si
Fin Pour
```

CORRECTION

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. La température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement est de 463 ° C.

n	0	1	2	3	4
T	1000	823,6	678,95	560,34	463,08

2. D'après l'algorithme $T_{n+1} = 0{,}82\ T_n + 3{,}6$

Montrons par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$.

Initialisation : si $n = 0$ alors $980 \times 0{,}82^0 + 20 = 980 + 20 = 1000 = T_0$

La propriété est initialisée.

Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$ alors $T_{n+1} = 980 \times 0{,}82^{n+1} + 20$.

$T_{n+1} = 0{,}82\ T_n + 20$ et $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 3{,}6$ donc $T_{n+1} = 0{,}82\ (980 \times 0{,}82^n + 20) + 3{,}6$

$T_{n+1} = 980 \times 0{,}82^{n+1} + 0{,}82 \times 20 + 3{,}6$.

$T_{n+1} = 980 \times 0{,}82^{n+1} + 16{,}4 + 3{,}6$.

$T_{n+1} = 980 \times 0{,}82^{n+1} + 20$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$.

3. Le four peut être ouvert sans risque pour les céramiques si $T_n \leq 70$

soit $980 \times 0{,}82^n + 20 \leq 70 \Leftrightarrow 0{,}82^n \leq \dfrac{50}{980} \Leftrightarrow n \ln 0{,}82 \leq -\ln 19{,}6 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{-\ln 19{,}6}{\ln 0{,}82}$

$\dfrac{-\ln 19{,}6}{\ln 0{,}82} \approx 14{,}99$, il faudra donc attendre 15 heures pour ouvrir le four sans risque.

Partie B

1. $f(0) = 1000$ donc $a + b = 1000$

$f'(t) = -\dfrac{a}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$ donc $f'(t) + \dfrac{1}{5}f(t) = -\dfrac{a}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + \dfrac{a}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + \dfrac{1}{5}b = \dfrac{1}{5}b$ or $f'(t) + \dfrac{1}{5}f(t) = 4$ donc $\dfrac{1}{5}b = 4$ soit $b = 20$

$a + b = 1000$ donc $a = 980$ donc pour tout nombre réel positif t : $f(t) = 980\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20$.

2. *a.* $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{-t}{5} = -\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$.

b. $f'(t) = -\dfrac{a}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$ avec $a = 980$ or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(t) < 0$

f est strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
f	1000	$\searrow$	20

c. $f(t) \leq 70 \Leftrightarrow 980\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20 \leq 70 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} \leq \dfrac{50}{980} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{t}{5}} \geq 19{,}6 \Leftrightarrow \dfrac{t}{5} \geq \ln 19{,}6 \Leftrightarrow t \geq 5 \ln 19{,}6$

$5 \ln 19{,}6 \approx 14{,}878$ donc $14{,}878 \times 60 = 892{,}68$

Il faudra donc attendre 893 minutes pour ouvrir le four sans risque.

3. *a.* La fonction f est positives sur R donc $\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une mesure de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 15$.

Construisons 5 trapèzes pour évaluer cette aire.

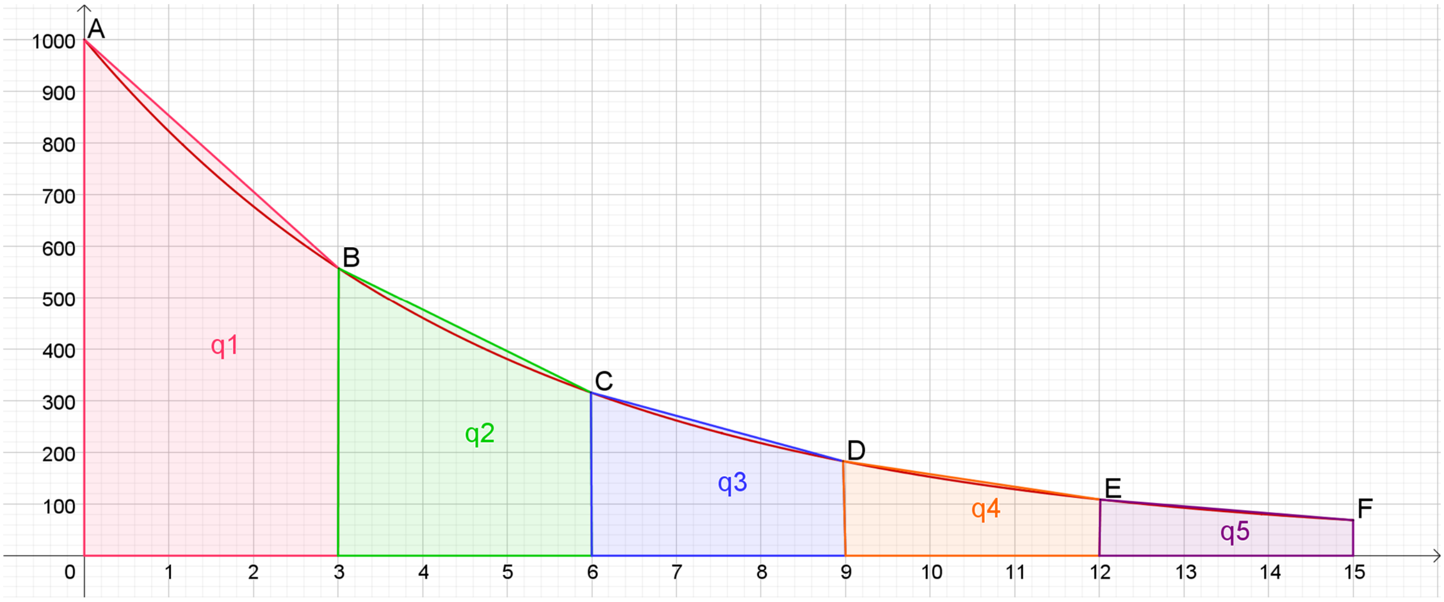
L'aire d'un trapèze est égale à $\dfrac{\text{petite base} + \text{grande base}}{2} \times \text{hauteur}$

Soit pour l'aire de q1 : $\dfrac{1000 + f(3)}{2} \times 3$, pour l'aire de q1 : $\dfrac{f(3) + f(4)}{2} \times 3$ etc.

donc $\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \dfrac{1000+f(3)}{2}\times 3 + \dfrac{f(3)+f(6)}{2}\times 3 + \dfrac{f(6)+f(9)}{2}\times 3 + \dfrac{f(9)+f(12)}{2}\times 3 + \dfrac{f(12)+f(15)}{2}\times 3$

$\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \dfrac{3}{2}\,[1000+f(15)] + 3\,[f(3)+f(6)+f(9)+f(12)]$

$\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 5094{,}89$ donc $\dfrac{1}{15}\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \dfrac{5094{,}89}{15}$ soit approximativement 339,66 degré Celcius.



b. $\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[980\times(-5)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20\,t\right]_0^{15} = [-4900\,\mathrm{e}^{-3} + 300] - (-4900)$

$\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t = -4900\,\mathrm{e}^{-3} + 5200$ donc $\theta = \dfrac{1}{15}\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{5200-4900\,\mathrm{e}^{-3}}{15} = \dfrac{1040-980\,\mathrm{e}^{-3}}{3}$ soit approximativement 330 ° C.

4. *a.* $d(t+1) = 980\,\mathrm{e}^{-\frac{t+1}{5}} + 20 - \left(980\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20\right) = 980\left(\mathrm{e}^{-\frac{t+1}{5}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right) = 980\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}\times\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)$ donc, pour tout nombre réel t positif : $d(t) = 980\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$.

b. On a vu que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} d(t) = 0$.

L'écart de température entre deux instants séparés d'une heure devient de plus en plus proche de 0 et donc, qu'au bout d'un certain temps, la température du four se stabilise.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

1. *a.* $j = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)$ donc $j = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

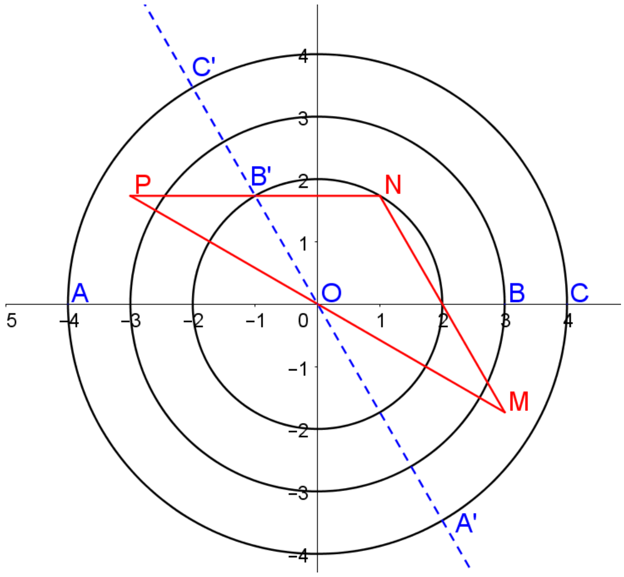
Forme algébrique		Forme exponentielle
$a' = j\,a = 2 - 2\,i\sqrt{3}$	$a = 4\,\mathrm{e}^{i\pi}$ donc $a' = 4\,\mathrm{e}^{i\pi}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$	$a' = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$
$b' = j\,b = -1 + i\sqrt{3}$	$b = 2$	$b' = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$
$c' = j\,c = -2 + 2\,i\sqrt{3}$	$c = 4$	$c' = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

b. A' appartient au cercle de centre O de rayon 4 et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA'}\right) = \frac{5\pi}{3}$

soit $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA'}\right) = -\frac{\pi}{3}$

B' appartient au cercle de centre O de rayon 2 et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OB'}\right) = \frac{2\pi}{3}$

C' appartient au cercle de centre O de rayon 2 et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OC'}\right) = \frac{2\pi}{3}$



2. $b' = 2\ e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $c' = 4\ e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $\overrightarrow{OC'} = 2\,\overrightarrow{OB'}$, les points O, B', C' sont alignés

$a' = 2 - 2\,i\sqrt{3}$ et $c' = -2 + 2\,i\sqrt{3}$ donc $c' = -a'$ soit $\overrightarrow{OC'} = -\overrightarrow{OA'}$, les points O, A', C' sont alignés donc les points A′, B′ et C′ sont alignés.

3. L'affixe de M est $m = \frac{a' + c}{2} = 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}} + 2 = 3 - i\sqrt{3}$

L'affixe de N est $n = \frac{c' + c}{2} = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}} + 2 = 1 + i\sqrt{3}$

L'affixe de P est $p = \frac{c' + a}{2} = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1 = -3 + i\sqrt{3}$

$PN^2 = |\,3 - i\sqrt{3}\ - 1 - i\sqrt{3}\,|^2 = 2^2 + 2^2 \times 3 = 16$

$NM^2 = |-3 + i\sqrt{3}\ - 1 - i\sqrt{3}\,|^2 = 4^2 = 16$ donc PN = NM, le triangle MNP est isocèle en N.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. *a.* A la calculette $P(X_U < 0{,}2) \approx 0{,}035$ et $P(0{,}5 \le X_U < 0{,}8) \approx 0{,}501$.

b. $P(X_U < 0{,}2) \approx 0{,}035$ soit 3,5 % du sucre est récupéré dans le récipient à fond étanche donc si on fait passer 1 800 grammes de sucre au travers de la série de tamis, on récupère $0{,}035 \times 1800 = 63\ g$ de sucre dans le récipient à fond étanche.

$P(0{,}5 \le X_U < 0{,}8) \approx 0{,}501$ soit 50,1 % du sucre est récupéré dans le tamis 2 donc si on fait passer 1 800 grammes de sucre au travers de la série de tamis, on récupère $0{,}501 \times 1800 = 901{,}8\ g$ de sucre dans le tamis 2.

2. 40 % de ces cristaux se retrouvent dans le tamis 2 donc $P(0{,}5 \le X_V < 0{,}8) = 0{,}4$

Soit $T = \frac{X_V - 0{,}65}{\sigma_V}$, T suit une loi normale centrée réduite et $P\left(\frac{0{,}5 - 0{,}65}{\sigma_V} \le T < \frac{0{,}8 - 0{,}65}{\sigma_V}\right) = 0{,}4$

Soit $P\left(-\frac{0{,}15}{\sigma_V} \le T < \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 0{,}4$ donc à la calculette $\frac{0{,}15}{\sigma_V} \approx 0{,}5244$ donc $\sigma_V \approx \frac{0{,}15}{0{,}5244}$ donc $\sigma_V \approx 0{,}286$

Partie B

1. *a.* $P(E) = P(E \cap U) + P(E \cap V) = 0{,}3 \times 0{,}03 + 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}044$

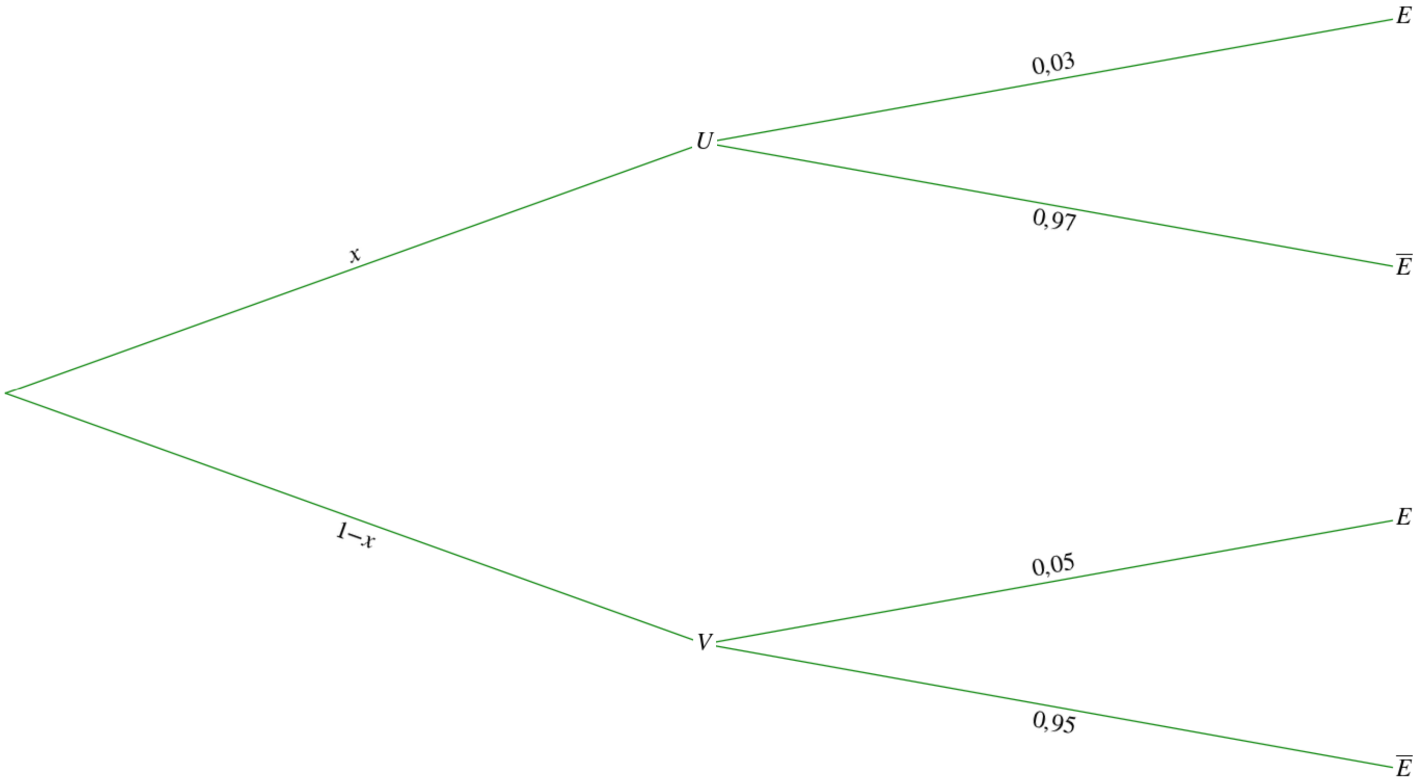
La probabilité que le paquet prélevé porte le label “extra fin” est 0,044.

b. $P_E(U) = \frac{P(E \cap U)}{P(E)} = \frac{0{,}03 \times 0{,}3}{0{,}044} = \frac{9}{44}$ donc sachant qu'un paquet porte le label « extra fin », la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U est approximativement 0,205.

2. $P(E) = 0{,}03 \times x + (1 - x) \times 0{,}05 = 0{,}05 - 0{,}02\,x$

$P_E(U) = \frac{P(E \cap U)}{P(E)} = \frac{0{,}03 \times x}{0{,}05 - 0{,}02\,x} = \frac{3\,x}{5 - 2\,x} = 0{,}3$ donc $3\,x = 0{,}3\,(5 - 2\,x)$

$3\,x + 0{,}6\,x = 0{,}15$ donc $x = \frac{1{,}5}{3{,}6} = \frac{5}{12}$. Pour que la condition soit satisfaite, il faut donc que $P(U) = \frac{5}{12}$ et que $P(V) = \frac{7}{12}$.



Partie C

1. On a $n = 150$, $p = 0{,}3$ donc $n \geq 30$, $n\,p = 45$ donc $n\,p \geq 5$ et $n\,(1 - p) = 105$ donc $n\,(1 - p) \geq 5$

Les conditions sont vérifiées pour pouvoir utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

$\mathrm{I} = \left[p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p\,(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p\,(1-p)}{n}} \right]$ soit I = [0,226 ; 0,374]

Soit f la proportion de paquets provenant de l'exploitation U dans l'échantillon : $f = \dfrac{30}{150} = 0{,}2$

$f \notin \mathrm{I}$ donc au risque d'erreur de 5 %, il a raison de remettre en question l'annonce de l'entreprise.

2. On a $n = 150$, $f = 0{,}42$ donc $n \geq 30$, $n\,f = 63$ donc $n\,f \geq 5$ et $n\,(1 - p) = 87$ donc $n\,(1 - p) \geq 5$

Les conditions sont vérifiées pour pouvoir utiliser un intervalle de confiance au seuil de 95%.

$\mathrm{I} = \left[f - \sqrt{\dfrac{1}{n}}\ ;\ f + \sqrt{\dfrac{1}{n}} \right]$ soit I ≈ [0,338 ; 0,502]

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de la droite (CD) est $\begin{cases} x = 4\,t \\ y = 3 \\ z = -4\,t + 2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

2. *a.* $\mathrm{BM}^2 = (4\,t - 4)^2 + 4^2 + (-4\,t + 2)^2 = 32\,t^2 - 48\,t + 36 = 4\,(8\,t^2 - 12\,t + 9)$

La distance BM est minimale quand BM^2 l'est aussi or $8\,t^2 - 12\,t + 9 = 8\left(t - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{9}{2}$.

La distance est minimale pour $t = \dfrac{3}{4}$ soit si M (3 ; 3 ; – 1)

b. $\overrightarrow{BH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BH}\,.\,\overrightarrow{CD} = -1 \times 4 + 4 \times 0 + (-1) \times (-4) = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. H est un point de la droite (CD), les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires donc (BH) est la hauteur issue de B du triangle BCD.

$BH^2 = (-1)^2 + 4^2 + (-1)^2 = 18$ donc $BH = 3\sqrt{2}$

$CD^2 = 4^2 + 0^2 + (-4)^2 = 32$ donc $CD = 4\sqrt{2}$

L'aire du triangle BCD est égale à $\frac{1}{2}$ BH × CD = $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 12$ cm^2.

3. *a.* H ∈ (CD) donc (BH) est une droite du plan (BCD)

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BH}\cdot\vec{n} = -1 \times 2 + 4 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$

$\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n} = 4 \times 2 + 1 \times 0 + 2 \times (-4) = 0$ donc $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

Une équation cartésienne du plan (BCD) est donc de la forme $2x + y + 2z + d = 0$

H ∈ (BCD) donc $2 \times 3 + 3 - 2 + d = 0$ soit $d = -7$

Une équation cartésienne du plan (BCD) est donc $2x + y + 2z - 7 = 0$

c. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

Une représentation paramétrique de Δ est donc $\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t + 4 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

d. Le point I appartient à la droite Δ donc a des coordonnées de la forme $(2t + 2 ; t + 1 ; 2t + 4)$

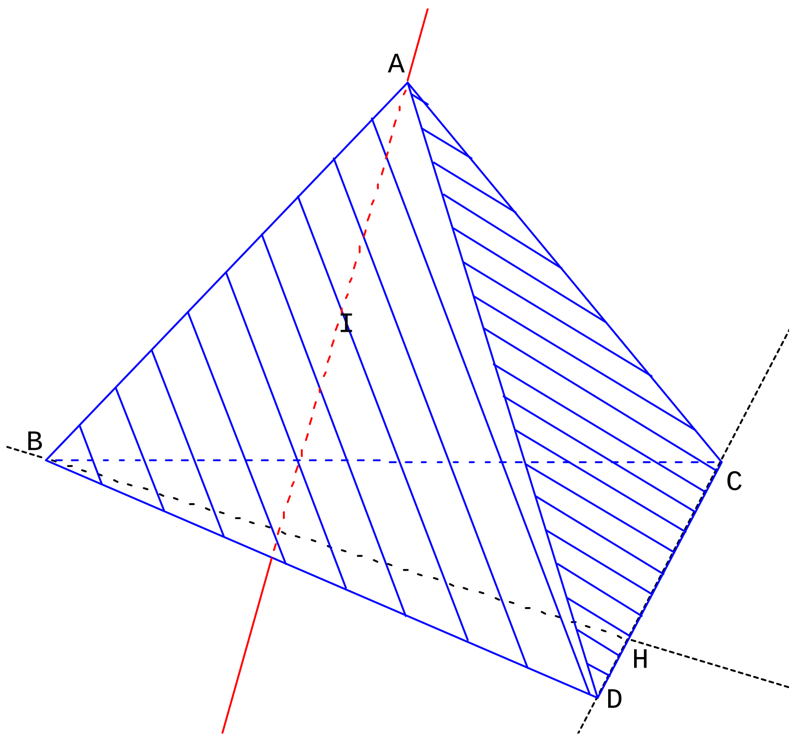
Le point I appartient au plan (BCD)

donc $2x + y + 2z - 7 = 0$

soit $2(2t + 2) + t + 1 + 2(2t + 4) - 7 = 0$

soit $9t + 6 = 0$ donc $t = \frac{-2}{3}$.

En remplaçant : le point I a pour coordonnées : $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$.



4. $AI^2 = \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2 = 4$

donc AI = 2

$V = \frac{1}{3} A_{BCD} \times AI = \frac{1}{3} \times 12 \times 2 = 8$ cm^3

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

À toute lettre de l'alphabet on associe un nombre entier x compris entre 0 et 25 comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Partie A : Cryptage

Le codage d'une lettre représentée par le nombre entier x est le nombre y tel que : $y \equiv x\,(x + 13)\ [33]$ avec $0 \leq y \leq 33$.

Bob veut envoyer le mot « NO » à Alice.

1. N $\longmapsto$ 13 donc $y \equiv 13 \times (13 + 13)\ [33]$ or $13 \times 26 = 338 = 33 \times 10 + 8$ donc $y \equiv 8\ [33]$

$0 \leq y \leq 33$ donc $y = 8$, Bob code la lettre « N » avec le nombre 8.

2. O $\longmapsto$ 14 donc $y \equiv 14 \times (14 + 13)\ [33]$ or $14 \times 27 = 378 = 33 \times 11 + 15$ donc $y \equiv 15\ [33]$

$0 \leq y \leq 33$ donc $y = 15$, Bob code la lettre « O » avec le nombre 15.

Partie B : Décryptage

Alice a reçu un message crypté qui commence par le nombre 3.

Pour décoder ce premier nombre, elle doit déterminer le nombre entier x tel que : $x\,(x + 13) \equiv 3\ [33]$ avec $0 \leq x \leq 26$.

1. $(x + 23)^2 = x^2 + 46\,x + 23^2$ or $23^2 = 33 \times 16 + 1$ et $46 = 33 + 13$ donc $(x + 23)^2 \equiv x^2 + 13\,x + 1\ [33]$.

$(x + 23)^2 \equiv 4\ [33] \Leftrightarrow x^2 + 13\,x + 1 \equiv 4\ [33] \Leftrightarrow x^2 + 13\,x \equiv 3\ [33] \Leftrightarrow x\,(x + 13) \equiv 3\ [33]$

2. *a.* Si $(x + 23)^2 \equiv 4\ [33]$ alors 33 divise $(x + 23)^2 - 4$ or $33 = 3 \times 11$, donc :

3 divise $(x + 23)^2 - 4$ soit $(x + 23)^2 - 4 \equiv 0\ [3]$ soit $(x + 23)^2 \equiv 4\ [3]$

11 divise $(x + 23)^2 - 4$ soit $(x + 23)^2 - 4 \equiv 0\ [11]$ soit $(x + 23)^2 \equiv 4\ [11]$

Le système d'équations $\begin{cases} (x+23)^2 \equiv 4 & [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 & [11] \end{cases}$ est vérifié.

b. Si $\begin{cases} (x+23)^2 \equiv 4 & [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 & [11] \end{cases}$ alors $\begin{cases} 3 \text{ divise } (x+23)^2 - 4 \\ 11 \text{ divise } (x+23)^2 - 4 \end{cases}$, 3 et 11 soint premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 3×11 divise $(x + 23)^2 - 4$ donc $(x + 23)^2 \equiv 4\ [33]$.

c. On a donc : $x\,(x + 13) \equiv 3\ [33] \Leftrightarrow (x + 23)^2 \equiv 4\ [33] \Leftrightarrow \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 4 & [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 & [11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 1 & [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 & [11] \end{cases}$

3. *a.* Les nombres entiers naturels a tels que $0 \leq a < 3$ et $a^2 \equiv 1\ [3]$ sont donc 1 et 2.

a	0	1	2
a^2	0	1	4
a^2 est congru modulo 3 à	0	1	1

b. Les nombres entiers naturels b tels que $0 \leq b < 3$ et $b^2 \equiv 4\ [11]$ sont donc 2 et 9

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
b^2 est congru modulo 11 à	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

4. *a.* $x\,(x + 13) \equiv 3\ [33] \Leftrightarrow \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 1 & [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 & [11] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+23) \equiv 1 & [3] \\ (x+23) \equiv 2 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} (x+23) \equiv 1 & [3] \\ (x+23) \equiv 9 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} (x+23) \equiv 2 & [3] \\ (x+23) \equiv 2 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} (x+23) \equiv 2 & [3] \\ (x+23) \equiv 9 & [11] \end{cases}$

or $23 = 3 \times 8 - 1$ donc $x + 23 \equiv x - 1\ [3]$ et $23 = 2 \times 11 + 1$ donc $x + 23 \equiv x + 1\ [11]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \equiv 1 & [3] \\ x+1 \equiv 2 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1 \equiv 1 & [3] \\ x+1 \equiv 9 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1 \equiv 2 & [3] \\ x+1 \equiv 2 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1 \equiv 2 & [3] \\ x+1 \equiv 9 & [11] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \equiv 3 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \equiv 3 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases}$

b. $\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases}$ a pour solution $x = 8$ $\begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases}$ a pour solution $x = 12$

$\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 1 & [11] \end{cases}$ a pour solution $x = 23$ $\begin{cases} x \equiv 0 & [3] \\ x \equiv 8 & [11] \end{cases}$ a pour solution $x = 30$

5.

```
Pour x allant de 0 à 32
        Si le reste de la division de x (x + 13) par 33 est égal à 3 alors
                Afficher x
        Fin Si
Fin Pour
```

6.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x (x + 13)	0	14	30	48	68	90	114	140	168	198	230	264	300
x (x + 13) est congru modulo 11 à	0	14	30	15	2	24	15	8	**3**	0	32	0	**3**

x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
x (x + 13)	338	378	420	464	510	558	608	660	714	770	828	888
x (x + 13) est congru modulo 11 à	8	15	24	2	15	30	14	0	21	11	**3**	30

x	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
x (x + 13)	950	1014	1080	1148	1218	1290	1364	1440	1518	1598
x (x + 13) est congru modulo 11 à	26	24	24	26	30	**3**	11	21	0	14

La première lettre du message envoyé est 3, il existe 4 valeurs possibles de x.
Alice ne peut pas connaître la première lettre du message envoyé par Bob
Le « chiffre de RABIN » n'est pas utilisable pour décoder un message lettre par lettre.