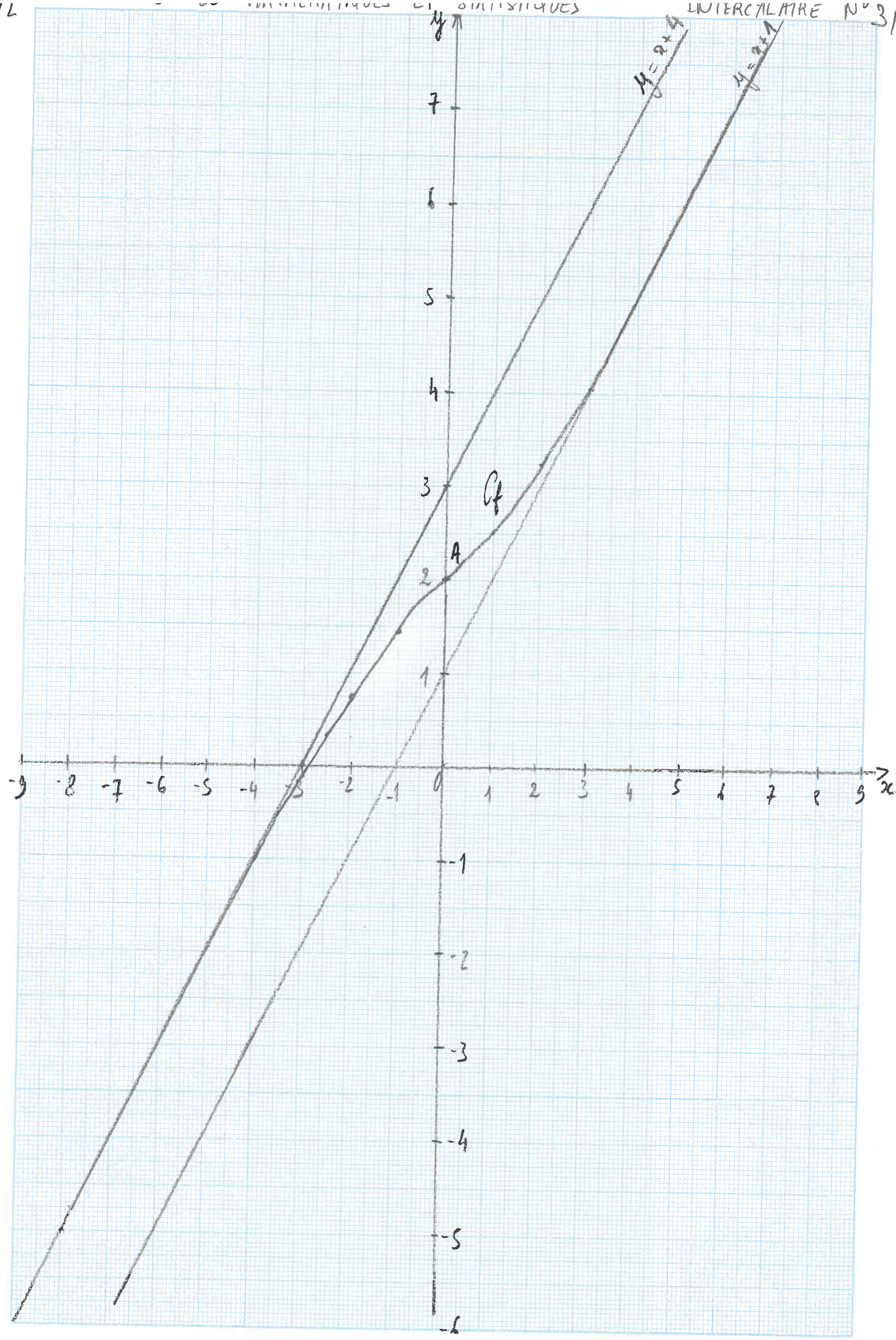




9192

Mathématiques et Statistiques.

4/6

⑤ la formule de la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison q est : $1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$

À la 20^e génération, l'arbre généalogique compterait 500 personnes, avec

$$S_{20} = U_1 \times \frac{1 - 2^{20}}{1 - 2} = 1 \times \frac{1 - 2^{20}}{1 - 2} = 2^{20} - 1 = 1048575$$

À la 20^e génération, l'arbre généalogique de Sophie compterait 1 048 575 personnes.

⑥ Ce calcul ne serait vrai que si aucun des ascendants de Sophie jusqu'à la 20^e génération ne s'est reproduit avec un autre des ascendants de Sophie.

EXERCICE 5

① Soit t_1 le taux d'évolution annuel moyen entre 1946 et 1954, y_0 et y_8 les nombres d'habitants de l'île Tégada respectifs en 1946 et 1954.

$$t_1 = 100 \times \left[\left(1 + \frac{y_8 - y_0}{y_0} \right)^{\frac{1}{8}} - 1 \right] = 100 \times \left[\left(1 + \frac{85412 - 80878}{80878} \right)^{\frac{1}{8}} - 1 \right] \approx 0,684$$

le taux d'évolution annuel moyen entre 1946 et 1954 est d'environ 0,684%

• Soit t_2 le taux d'évolution annuel moyen entre 1990 et 1999

De la même façon : $t_2 = 100 \times \left[\left(1 + \frac{y_{53} - y_{44}}{y_{44}} \right)^{\frac{1}{9}} - 1 \right] = 100 \times \left[\left(1 + \frac{116832 - 113230}{113230} \right)^{\frac{1}{9}} - 1 \right]$

$$\approx 0,349$$

Le taux d'évolution annuel moyen entre 1990 et 1999 de la population de l'île Tagader est d'environ 0,549%

② Voir feuille de papier millimétré n°2 ou intercalaire n°5.

③ Le coefficient de corrélation linéaire est de 0,989 environ, entre x et y . Un ajustement affine est justifié car le coefficient de corrélation linéaire indique le degré de liaison entre deux séries statistiques, et plus il est proche de ses valeurs extrêmes, 1 et -1, plus les deux séries sont corrélées linéairement. Avec un coefficient égal à 0,989 (à 10^{-3} près), nous sommes très proches de 1, il y a donc une forte corrélation linéaire entre les données des séries x et y . Cela signifie que la somme des carrés des écarts verticaux entre les points du nuage ^{les points de même abscisse de} et la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés sera faible, donc la droite passera près des points du nuage.

④ Les coordonnées du point moyen G sont les moyennes arithmétiques $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des séries respectives x_i et y_i .

$$\text{Donc } \bar{x} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i = \frac{1}{8} \times 208 = 26 \quad (\text{ce qui correspond à l'année 1972, car } 1946 + 26 = 1972)$$

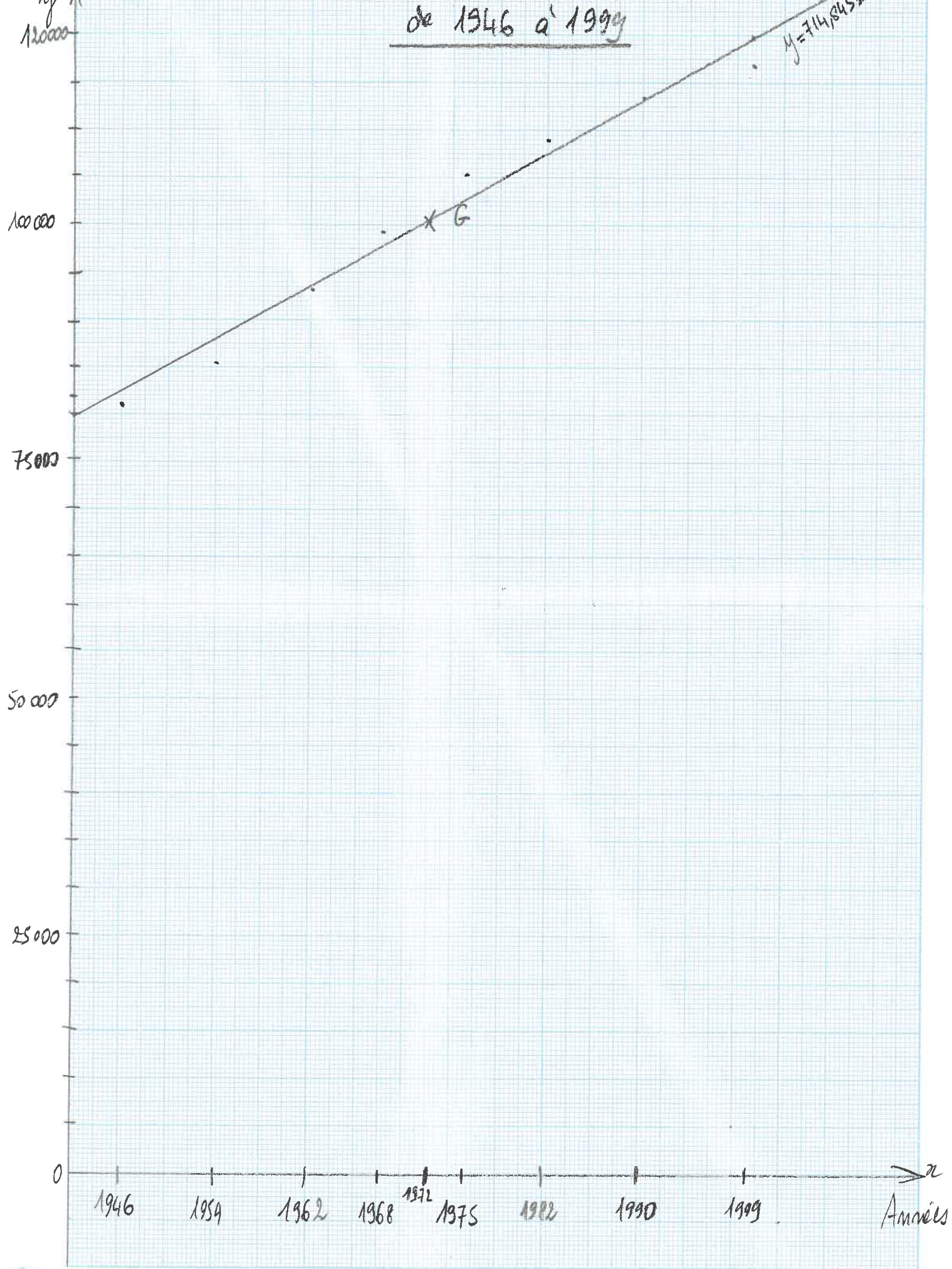
$$\text{Et } \bar{y} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i = \frac{1}{8} \times 802480 = 100310$$

le point moyen G associé à la série (x_i, y_i) a pour coordonnées $(26; 100310)$ (voir feuille de papier millimétré n°2)

Population (nombre d'habitants)

POPULATION DE L'ÎLE TAGADA
de 1946 à 1999

$y = 714,845x + 8174,006$



9192

Mathématiques et statistiques.

6/6

(5) Une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés est de la forme :

$$y = ax + b, \text{ avec } a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

$$= \frac{1}{8} \times 22\,492\,896 - 26 \times 100\,310$$

$$= \frac{2\,811\,612}{8} - 2\,608\,060 = 203\,552$$

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{8} \times 7686 - 26^2$$

$$= 960,75 - 676 = 284,75 = \frac{1139}{4}$$

$$\frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)} = \frac{203\,552}{\frac{1139}{4}} = \frac{203\,552 \times 4}{1139} = \frac{814\,208}{1139} \approx 714,845$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 100\,310 - \frac{814\,208 \times 26}{1139} = \frac{(110\,310 \times 1139) - (814\,208 \times 26)}{1139}$$

$$= \frac{124\,253\,090 - 21\,169\,408}{1139} = \frac{93\,083\,682}{1139} \approx 81\,724,040$$

Une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés est (à 10^{-3} près pour les coefficients)

$$\underline{y = 714,845x + 81\,724,040}$$

(6) Voir son tracé sur l'intercalaire n°5

⑦ L'année 2020 a le rang 74, car $2020 - 1946 = 74$.

$$N_{74} = \frac{814\,208}{1139} \times 74 + \frac{93\,083\,682}{1139} \approx 134\,622,57$$

En supposant que l'évolution de la population se poursuive selon la même pente, la population de l'île Tagada serait d'environ 134 623 habitants en 2020.