Antilles Guyane septembre 2017

EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Partie A

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.

Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.

La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p.

Pour une journée donnée, on note :

• E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;

• V l'évènement « Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est $P(V) = 0{,}3\,p + 0{,}6$.

3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

a. Calculer la valeur de p.

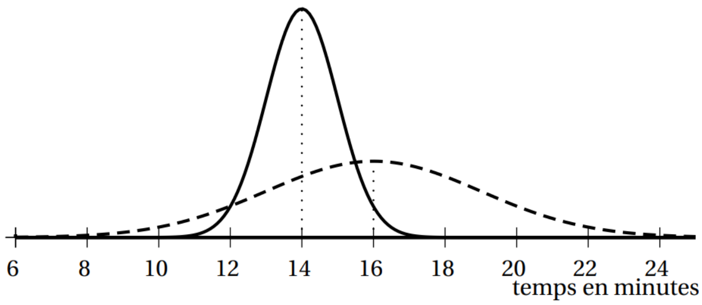
b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

Partie B

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire T_V suivant une loi normale d'espérance μ_V et d'écart-type 1 minute.

Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T_C suivant une loi normale d'espérance μ_C et d'écart-type 3 minutes.

1. On nomme C_C et C_V les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires T_V et T_C représentées dans la figure ci-dessous.



Déterminer, en justifiant votre réponse, μ_V et μ_C .

2. Calculer la probabilité que pour Romane un trajet domicile-travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes. Arrondir la réponse à 10^{-4}.

3. Quel mode de déplacement Romane doit-elle privilégier si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail ?

Partie C

En hiver, Romane roule en vélo de nuit. Son vélo est visible grâce à une ampoule dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X, suivant une loi exponentielle de paramètre λ, réel strictement positif.

La fonction de densité associée est donc la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(t) = \lambda\,e^{-\lambda t}$.

1. Soit b un réel positif. Démontrer, à l'aide d'une intégrale, que $P(X \leq b) = 1 – e^{\lambda b}$.

2. On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est 0,9.

a. En déduire la valeur exacte de λ.

b. Calculer la probabilité que la durée de fonctionnement de l'ampoule soit supérieure à 250 heures sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 200 heures.

Exercice 2 3 points Commun à tous les candidats

Soit la suite de nombres complexes (a_n) définie par $\begin{cases} z_0 = 100 \\ z_{n+1} = \dfrac{i}{3} z_n \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$. Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe a_n .

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $AM \leq r$.

Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

Exercice 3 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1 ; +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, $f(x) = \frac{1}{x}\ln(x)$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe C admet une asymptote horizontale.

2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1 ; +\infty[$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $[1 ; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout entier naturel n.

1. Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2}[\ln(2)]^2$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle [1; 2], on a

$$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leq \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2).$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note R l'ensemble des nombres réels.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A(1 ; 1 ; 14), B(0 ; 1 ; 8) et C(− 2 ; 2 ; 4) ainsi que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\8\\-1\end{pmatrix}$.

1. *a.* Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

c. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $6x + 8y - a = 0$.

2. On considère la droite Δ des points M dont les coordonnées $(x ; y ; a)$ sont données par $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t - \frac{1}{2} \\ z = 4t + 2 \end{cases}$, $t \in$ R.

a. Donner un vecteur directeur de la droite Δ.

b. La droite Δ et le plan (ABC) sont-ils sécants ?

3. Dans cette question, on considère l'ensemble (E) des points M dont les coordonnées $(x ; y ; a)$ sont données par :

$$\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = t + 1, \ t \in \mathrm{R}. \\ z = 2t \end{cases}$$

Démontrer qu'il existe un unique point M qui appartient à la fois à (E) et à (ABC).

Il n'est pas demandé de déterminer ses coordonnées.

Exercice 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit p un entier relatif donné.

On s'intéresse dans cette question à l'équation (E_p) $3x + 4y = p$ où $(x\,;\,y)$ est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(-p\,;\,p)$ est une solution particulière de l'équation.

b. Démontrer que l'ensemble des solutions de (E_p) est l'ensemble des couples de la forme $(-p + 4k\,;\,p - 3k)$ où k est un entier relatif.

Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.

On considère le plan P d'équation cartésienne $6x + 8y - a = 0$.

2. Soit M_0 un point de coordonnées $(x_0\,;\,y_0\,;\,a_0)$ qui appartient au plan P et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que a_0 est pair.

b. On pose $a_0 = 2p$ où p est un entier relatif.

Prouver que le couple $(x_0\,;\,y_0)$ est solution de l'équation (E_p).

c. En utilisant la question 1., déterminer l'ensemble des points du plan P à coordonnées entières.

3. À tout point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,a)$, on associe le point M′ de coordonnées $(x'\,;\,y'\,;\,a')$ avec

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 180 \\ 56 & 41 & -144 \\ 28 & -30 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $6x' + 8y' - a' = 101\,(6x + 8y - a)$.

b. En déduire que si le point M est un point du plan P, alors le point M′ est aussi un point du plan P.

c. Soit Δ la droite perpendiculaire à P passant par O.

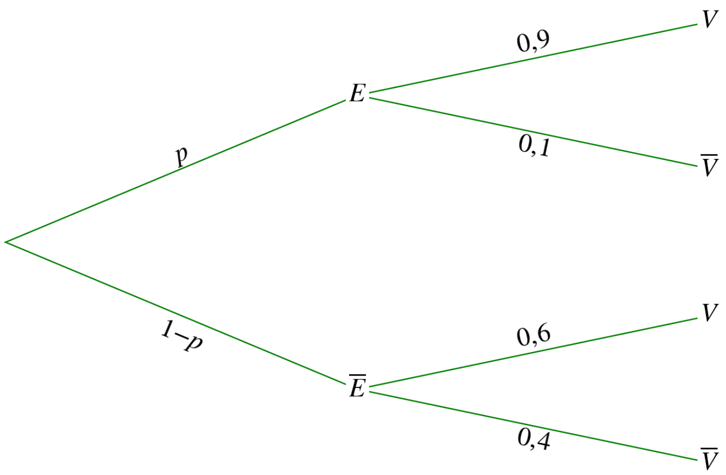
Montrer que si le point M appartient à Δ, alors le point M′ appartient aussi à Δ.

CORRECTION

EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. $P(V) = P(V \cap E) + P(V \cap \overline{E}) = 0{,}9\,p + 0{,}6\,(1 - p) = 0{,}3\,p + 0{,}6$.

3. *a.* $P(V) = 0{,}675$ donc $0{,}3\,p + 0{,}6 = 0{,}675$ donc $0{,}3 = 0{,}075$ soit $p = 0{,}25$

b. $P_V(E) = \dfrac{P(V \cap E)}{P(V)} = \dfrac{0{,}25 \times 0{,}9}{0{,}675} = \dfrac{0{,}25 \times 0{,}9}{0{,}25 \times 0{,}9 \times 3} = \dfrac{1}{3}$.

Partie B

1. $\mu_C > \mu_V$ donc la courbe en pointillés représente la fonction de densité de la variable aléatoire T_C et celle en trait continu représente la fonction de densité de la variable aléatoire T_V.

Les deux courbes sont symétriques respectivement par rapport aux droites d'équation $x = 16$ et $x = 14$ donc $\mu_V = 14$ et $\mu_C = 16$.

2. A la calculette : $P(10 \le T_V \le 15) = 0{,}8413$

3. $P(T_V \le 15) = 0{,}8413$ et $P(T_C \le 15) = 0{,}3694$ donc Romane doit privilégier le vélo si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail.

Partie C

1. $P(X \le b) = \int_0^b \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^b = 1 - e^{\lambda b}$.

2. *a.* $P(X \ge 50) = 0{,}9 \Leftrightarrow e^{-50\lambda} = 0{,}9 \Leftrightarrow -50\,\lambda = \ln 0{,}9 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0{,}9}{50} \Leftrightarrow \lambda \approx 0{,}0021$

b. Une loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement donc $P_{(X \ge 200)}(X \ge 250) = P(X \ge 50) = 0{,}9$

Exercice 2 3 points Commun à tous les candidats

1. Pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \dfrac{i}{3} z_{n+1} = \left(\dfrac{i}{3}\right)^2 z_n = -\dfrac{1}{3} z_n$ donc $\overrightarrow{OM_{n+2}} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM_n}$ donc les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2. $|a_{n+1}| = \dfrac{1}{3}\,|a_n|$ donc la suite $(|a_n|)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ de premier terme $|a_0| = 100$

donc $|a_n| = 100\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$0 < \dfrac{1}{3} < 1$ et $|a_0| > 0$ donc la suite $(|a_n|)$ est décroissante

$|a_5|\ \dfrac{100}{243}$, $|a_5| < 1$ donc si $n \ge 5$, $|a_n| \le 1$.

Exercice 3 **5 points** **Commun à tous les candidats**

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe C.

2. $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $f'(x) = \dfrac{x \times \dfrac{1}{x} - \ln x}{x^2}$ donc $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

3. Sur $[1 ; +\infty[$, $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \mathrm{e}$

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
f	0	↗	e^{-1}	↘	0

Partie B

1. $u_0 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} \ln(x)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}[\ln(x)]^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ [\ln(2)]^2$.

f est une fonction continue positive sur $[0 ; 2]$ donc l'aire limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$, $x = 2$ a pour mesure $\dfrac{1}{2}\ [\ln(2)]^2$ en unités d'aire.

2. La fonction ln est croissante sur $[1 ; 2]$ donc pour tout x de $[1 ; 2]$, $\ln 1 \leq \ln(x) \leq \ln(2)$ soit $0 \leq \ln(x) \leq \ln(2)$

Pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 2]$, on a $\dfrac{1}{x^{n+1}} > 0$ donc en multipliant par $\dfrac{1}{x^{n+1}}$ tous les termes de l'inégalité précédente : $0 \leq \dfrac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leq \dfrac{1}{x^{n+1}} \ln(2)$.

3. Pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 2]$, $0 \leq \dfrac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leq \dfrac{1}{x^{n+1}} \ln(2)$.

donc $0 \leq u_n \leq \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2)\, \mathrm{d}x$ or $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2)\, \mathrm{d}x = \ln(2) \left[\frac{-1}{n\, x^n}\right]_1^2 = \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

donc, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(2)}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) = 0$. D'après le théorème des gendarmes, comme pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 4 **5 points** **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. *a.* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C définissent un plan.

b. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \times 6 + 0 + 6 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 6 + 8 + 10 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc le plan (ABC) a une équation cartésienne de la forme : $6x + 8y - a + d = 0$.

B $\in$ (ABC) donc $8 \times 1 - 8 + d = 0$ soit $d = 0$ donc le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $6x + 8y - a = 0$.

2. *a.* Un vecteur directeur de la droite Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc la droite Δ et le plan (ABC) sont sécants.

3. Soit M un point de (E), M appartient au plan (ABC) si et seulement si $6(t^3 + t) + 8(t + 1) - 2t = 0$.

soit $6t^3 + 12t + 8 = 0 \Leftrightarrow 3t^3 + 6t + 4 = 0$

Soit $f(t) = 3t^3 + 6t + 4$ donc

$f'(t) = 9t^2 + 6$ donc $f'(t) > 0$ donc f est strictement croissante sur R.

f est définie continue strictement croissante sur R, $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ donc l'équation $f(t) = 0$ admet une seule solution α dans R, il existe un unique point M $(\alpha^3 + \alpha ; \alpha + 1 ; -2\alpha)$ qui appartient à la fois à (E) et à (ABC).

Exercice 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $3 \times (-p) + 4p = -3p + 4p = p$ donc le couple $(-p\,;\,p)$ est une solution particulière de l'équation.

b. $\begin{cases} 3x + 4y = p \\ 3(-p) + 4p = p \end{cases}$ donc par différence membre à membre, $3(x+p) + 4(y-p) = 0$

$3(x+p) = -4(y-p)$ donc 4 divise $3(x+p)$ or 3 et 4 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 4 divise $x + p$

Il existe un entier k tel que $x + p = 4k$ soit $x = -p + 4k$

En remplaçant dans $3(x+p) = -4(y-p)$ alors $-4(y-p) = 3 \times 4k$ donc $y - p = -3k$ donc $y = p - 3k$

Réciproquement : Si $x = -p + 4k$ et $y = p - 3k$ alors $3x + 4y = -3p + 12k + 4p - 12k = p$ donc l'ensemble des solutions de (E_p) est les couples solutions de (E_p) sont de la forme $(-p + 4k\,;\,p - 3k)$ où k est un entier relatif.

2. Soit M_0 un point de coordonnées $(x_0\,;\,y_0\,;\,a_0)$ qui appartient au plan P et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.

a. $a_0 = 6x_0 + 8y_0 = 2(3x_0 + 4y_0)$ donc a_0 est pair.

b. Si $a_0 = 2p$ où p est un entier relatif alors $2p = 2(3x_0 + 4y_0)$ donc $3x_0 + 4y_0 = p$ donc le couple $(x_0\,;\,y_0)$ est solution de l'équation (E_p).

c. Les couples solutions de (E_p) sont de la forme $(-p + 4k\,;\,p - 3k)$ où k est un entier relatif , donc les points du plan P ont des coordonnées de la forme $(-p + 4k\,;\,p - 3k\,;\,2p)$ où k et p sont des entiers relatifs.

3. ***a.*** $x' = 31x + 75y + 180a$; $y' = 56x + 41y - 144a$ et $a' = 28x - 30y + 29a$

donc $6x' + 8y' - a' = 186x + 450y + 1080a + 448x + 328y - 1152a - 28x + 30y - 29a$

$6x' + 8y' - a' = 606x + 808y - 101a$

$6x' + 8y' - a' = 101(6x + 8y - a)$.

b. Si le point M est un point du plan P, alors $6x + 8y - a = 0$ donc $6x' + 8y' - a' = 101(6x + 8y - a) = 0$ donc le point M′ est aussi un point du plan P.

c. La droite Δ perpendiculaire à P passant par O a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 6t \\ y = 8t\,,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$

Si le point M appartient à Δ, alors $x' = 31x + 75y + 180a = 606t$

$y' = 56x + 41y - 144a = 808t$ et $a' = 28x - 30y + 29a = -101t$

En posant $t' = 101t$, on a $\begin{cases} x' = 6t' \\ y' = 8t' \\ z' = -t' \end{cases}$ donc le point M′ appartient aussi à Δ.