Déterminer les couple (a, b) des entier naturels tel que : $a + b = 651$ et PPCM(a, b) / PGCD(a, b) =108

CORRECTION

Soit d = PGCD (a, b) et m = PPCM (a, b)
Il existe deux entiers naturels a' et b' tels que $a = d\, a'$, $b = d\, b'$ avec a' et b' premiers entre eux.

$m = d\, a'\, b'$ donc en remplaçant : $d\,(a' + b') = 651$ et $a'\, b' = 108$
donc d divise 651 or $651 = 3 \times 7 \times 31$ donc $d \in \{1 ; 3 ; 7 ; 21 ; 31 ; 93 ; 217 ; 651\}$

On a donc 8 systèmes possibles :

$d = 1$ et $\begin{cases} a'+b'=651 \\ a'b'=108 \end{cases}$ ou $d = 3$ et $\begin{cases} a'+b'=317 \\ a'b'=108 \end{cases}$ ou $d = 7$ et $\begin{cases} a'+b'=93 \\ a'b'=108 \end{cases}$ ou $d = 21$ et $\begin{cases} a'+b'=31 \\ a'b'=108 \end{cases}$

$d = 31$ et $\begin{cases} a'+b'=21 \\ a'b'=108 \end{cases}$ ou $d = 93$ et $\begin{cases} a'+b'=7 \\ a'b'=108 \end{cases}$ ou $d = 217$ et $\begin{cases} a'+b'=3 \\ a'b'=108 \end{cases}$ ou $d = 651$ et $\begin{cases} a'+b'=1 \\ a'b'=108 \end{cases}$

a' et b' sont premiers entre eux donc $a' + b'$ et $a'\, b'$ sont premiers entre eux or $108 = 3^3 \times 2^2$
Si $d \in \{1 ; 7 ; 31 ; 217\}$108 et 651 ne sont pas premiers entre eux donc $d \neq 1$, $\neq 7$, $d \neq 31$ et $d \neq 217$
Les possibilités sont donc $d \in \{3 ; 21 ; 93 ; 651\}$

$d = 3$ et $\begin{cases} a'+b'=317 \\ a'b'=108 \end{cases}$ a' et b' sont solutions de $x^2 - 317\,x + 108 = 0$
$\Delta = 100057$ or Δ n'est pas le carré d'un entier donc $x^2 - 317\,x + 108 = 0$ n'a pas de solution entière

$d = 21$ et $\begin{cases} a'+b'=31 \\ a'b'=108 \end{cases}$ a' et b' sont solutions de $x^2 - 31\,x + 108 = 0$
$\Delta = 529$ donc $x_1 = 4$ et $x_2 = 27$

$d = 93$ et $\begin{cases} a'+b'=7 \\ a'b'=108 \end{cases}$ a' et b' sont solutions de $x^2 - 7\,x + 108 = 0$
$\Delta = -383$ donc $x^2 - 7\,x + 108 = 0$ n'a pas de solution entière

$d = 651$ et $\begin{cases} a'+b'=1 \\ a'b'=108 \end{cases}$ a' et b' sont solutions de $x^2 - x + 108 = 0$
$\Delta = -431$ donc $x^2 - x + 108 = 0$ n'a pas de solution entière