C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260 p. 3602-3604 (29 mars 1965). Groupe 6.

OPTIQUE CRISTALLINE. — *Mesure des contraintes par photoélasticité dans un cristal cubique transparent.* Note (*) de M. **Bernard Schaeffer**, présentée par M. Jean Wyart.

L'emploi de la photoélasticité dans les cristaux présente une difficulté du fait que, dans le cas général, les directions principales des vibrations lumineuses ne coïncident pas avec les directions des contraintes principales. Cette difficulté n'existe pas dans le cas où la contrainte est parallèle à un élément de symétrie; c'est le cas où nous nous étions placés dans notre Note précédente [1]. Nous allons montrer comment, dans un cas plus général, la détermination des intensités lumineuses transmises entre polariseurs croisés, pour deux orientations différant de 45°, permet de calculer en chaque point les valeurs $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ et σ_{12} du tenseur des contraintes.

Nous supposerons que nous avons affaire à une contrainte plane s'exerçant dans le plan (001) d'un cristal cubique. Ce plan est un plan de symétrie pour le cristal et, dans le cas présent, pour l'ensemble des phénomènes, en négligeant les effets de bord.

Soient σ_{11}, σ_{22} et σ_{12} les composantes du tenseur des contraintes, rapportées aux axes Ox_1, Ox_2, dirigés suivant [100] et [010].

Lorsque l'éprouvette est libre de contraintes, l'indicatrice optique est une sphère coupant le plan $Ox_1\,Ox_2$ suivant un cercle d'équation :

$$B_0(x_1^2 + x_2^2) = 1, \qquad \text{avec} \quad B_0 = \frac{1}{n_0^2},$$

n_0 étant l'indice du cristal considéré.

Quand l'éprouvette est sous contrainte, l'indicatrice devient un ellipsoïde [2] admettant pour plan de symétrie le plan $Ox_1\,Ox_2$ qu'elle coupe suivant une ellipse d'équation :

$$B_{11}x_1^2 + B_{22}x_2^2 + 2B_{12}x_1x_2 = 1.$$

Le milieu se comporte alors comme une lame cristalline biréfringente. Soit α l'angle entre l'une de ses lignes neutres et le polariseur, l'intensité transmise s'écrit :

$$I = I_0 \sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2 2\alpha,$$

où φ est la différence de phase entre les deux vibrations principales. Dans notre cas, comme l'angle φ est faible (inférieur à 20°) on peut remplacer le sinus par l'arc, ce qui donne :

$$I = I_0\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \sin^2 2\alpha.$$

Soit θ l'angle entre la ligne neutre considérée ci-dessus et l'axe Ox_1. Dans le cas particulier où les polariseurs sont parallèles aux axes de coordonnées, on a $\alpha = \theta$, et, par suite :

$$I_1 = I_0 \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \sin^2 2\theta.$$

Si les polariseurs font un angle de 45° avec les axes de coordonnées, $\alpha = \theta + (\pi/4)$, d'où

$$I_2 = I_0 \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \cos^2 2\theta.$$

On a pour φ la valeur

$$\varphi = \frac{2\pi e}{\lambda}(n_1 - n_2),$$

n_1 et n_2 étant les indices de réfraction principaux et e l'épaisseur de la lame.

Soient B_1 et B_2 les imperméabilités diélectriques principales ($B_1 = 1/n_1^2$, $B_2 = 1/n_2^2$); comme n_1 et n_2 sont peu différents, on peut écrire en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à un :

$$\varphi = -\frac{\pi e n_0^3}{\lambda}(B_1 - B_2).$$

En remplaçant φ par sa valeur dans les expressions de I_1 et de I_2, on obtient

$$I_1 = I_0 \left(\frac{\pi e n_0^3}{2\lambda}\right)^2 (B_1 - B_2)^2 \sin^2 2\theta,$$
$$I_2 = I_0 \left(\frac{\pi e n_0^3}{2\lambda}\right)^2 (B_1 - B_2)^2 \cos^2 2\theta.$$

Or, on montre facilement les relations suivantes :

$$B_{11} - B_{22} = (B_1 - B_2)\cos 2\theta,$$
$$B_{12} = +\frac{B_1 - B_2}{2}\sin 2\theta.$$

On en déduit

$$I_1 = I_0 \left(\frac{\pi e n_0^3}{\lambda}\right)^2 B_{12}^2,$$
$$I_2 = I_0 \left(\frac{\pi e n_0^3}{2\lambda}\right)^2 (B_{11} - B_{22})^2.$$

Les imperméabilités sont reliées aux contraintes; on a en particulier, dans le système cubique,

$$B_{11} - B_{22} = (q_{11} - q_{12})(\sigma_{11} - \sigma_{22}),$$
$$B_{12} = q_{44}\sigma_{12}.$$

Les q_{ij} étant les coefficients piézo-optiques [3]; on en déduit

$$\sigma_{12} = \pm \frac{\lambda}{\pi e n_0^3 q_{44}} \sqrt{\frac{I_1}{I_0}},$$
$$\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} = \pm \frac{\lambda}{\pi e n_0^3 (q_{11} - q_{12})} \sqrt{\frac{I_2}{I_0}}.$$

On voit qu'il faut mesurer trois valeurs de l'intensité lumineuse transmise à travers l'échantillon, à savoir : I_0 intensité entre polariseurs parallèles, I_1 intensité entre polariseurs croisés orientés parallèlement et perpendiculairement à [100] et I_2 intensité entre polariseurs croisés orientés à 45° de la position précédente.

Ces mesures permettent de calculer σ_{12} et la différence $\sigma_{11}-\sigma_{22}$, le signe étant déterminé à l'aide d'une lame teinte sensible. De là, il est possible de calculer la différence des contraintes principales et leur direction.

(*) Séance du 22 mars 1965.

(1) C. Dupuy, H. Saucier et B. Schaeffer, *Comptes rendus*, 257, 1963, p. 4170.

(2) J. F. Nye, *Propriétés physiques des cristaux*, Paris, 1961.

(3) R. S. Krishnan, *Progress in crystal physics*, New York, 1958.

(*Laboratoire de Minéralogie et Pétrographie, Faculté des Sciences, 1, rue Blessig, Strasbourg, Bas-Rhin.*)