Amérique du Nord mai 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	2,000 0	2,000 0

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n)?

2. *a*. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

CORRECTION

1. *a.* Une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$ est 1,8340

i	1	2	3
u	1,4142	1,6818	1,8340

b. Cet algorithme permet de calculer le terme u_n pour une valeur quelconque de n.

c. La suite (u_n) semble être croissante et avoir pour limite 2.

2. *a.* Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 2$.
Initialisation : $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leq 2$. La propriété est vérifiée pour $n = 2$.
Hérédité : Montrons pour tout n de N que, si $0 < u_n \leq 2$ alors $0 < u_{n+1} \leq 2$.
$0 < u_n \leq 2$ donc $0 < 2\,u_n \leq 4$ donc $0 < \sqrt{2\,u_n} \leq 2$ soit $0 < u_{n+1} \leq 2$
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $0 < u_n \leq 2$.

b. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2\,u_n} - u_n = \sqrt{u_n}\,(\sqrt{2} - \sqrt{u_n})$
$0 < u_n \leq 2$ donc $\sqrt{u_n} \leq \sqrt{2}$ donc $\sqrt{2} - \sqrt{u_n}) \geq 0$
$u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

c. la suite (u_n) est croissante majorée par 2 donc est convergente.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.
a. $v_0 = \ln (u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$
$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2 = \ln\sqrt{2\,u_n} - \ln 2$

$v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln (2\,u_n) - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln 2 + \ln (u_n)) - \ln 2$

$v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\ln (u_n) - \ln 2)$ donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$

La suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. La suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$ donc pour tout entier naturel n, $v_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ln 2$, soit $v_n = -\dfrac{\ln 2}{2^n}$.

$\ln u_n = v_n + \ln 2$ donc $u_n = e^{v_n + \ln 2} = 2\,e^{-\frac{\ln 2}{2^n}}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\ln 2}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\,e^0 = 2$

d.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant Que $u \leq 1{,}999$ faire
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2\,u}$
	n prend la valeur $n + 1$
	FinTantQue
Sortie :	Afficher n