Représentation paramétrique d'une droite

Exemple : question type bac avec prise d'initiative

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $E(2\,;1\,;-3)$ et $F(1\,;-1\,;2)$.

Affirmation :

Une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+4t \\ z = 7-10t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Correction :

Introduction :

$M(x;y;z) \in (EF)$

$\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}\ /\ \overrightarrow{EM} = t\,\overrightarrow{EF}$

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}\ /\ \begin{pmatrix} x - x_E \\ y - y_E \\ z - z_E \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \\ z_F - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}\ /\ \begin{cases} x - 2 = -t \\ y - 1 = -2t \\ z + 3 = 5t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}\ /\ \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 5t - 3 \end{cases}$: Représentation paramétrique de la droite (EF)

On ne retrouve pas la représentation paramétrique proposée par l'énoncé !

Rien d'étonnant, une droite passe par une infinité de points et possède une infinité de vecteurs directeurs (tous colinéaire entre eux).
Une droite de l'espace admet donc une infinité de représentations paramétriques.

Comment vérifier que la représentation paramétrique donnée est valable ou pas ?

Méthode 1 : en utilisant les vecteurs directeurs et les points

Une droite est déterminée par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.

La droite (EF) passe par E et admet $\overrightarrow{EF}$ pour vecteur directeur.

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+4t \\ z = 7-10t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

est la représentation paramétrique de la droite (d) passant par $A(0\,;-3\,;7)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2\,;4\,;-10)$

- ✦ Puisque $\vec{u} = 2\overrightarrow{EF}$, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et donc que les droites (EF) et (d) sont parallèles.

- ✦ $E \in (d) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \begin{cases} x_E = 2t \\ y_E = -3+4t \\ z_E = 7-10t \end{cases}$

Le point E appartient à la droite (d) si ses coordonnées vérifient le système d'équations paramétriques de (d)

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \begin{cases} 2 = 2t \\ 1 = -3+4t \\ -3 = 7-10t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

On en déduit que (d) passe par E.

Finalement, d'après les deux résultats qui précèdent, on en conclut que la représentation paramétrique donnée est bien valable pour la droite (EF).

Méthode 2 : en utilisant le paramètre t

Soit la représentation paramétrique proposée dans l'énoncé : $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+4t \\ z = 7-10t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Pour chaque valeur de t substituée dans la représentation paramétrique donnée on obtient un point de la droite définie par le système.

Pour $t = 1$ on retrouve les coordonnées du point $E(2\,;1\,;-3)$

Pour $t = \frac{1}{2}$ on retrouve les coordonnées du point $F(1\,;-1\,;2)$

Par conséquent le système est une représentation paramétrique de la droite (EF).