Amérique du Sud novembre 2005

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{4}{\bar{z}}$, où $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.
3. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f , dont on précisera l'affixe.

4. *a*. Donner une mesure de l'angle ($\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$). Interpréter géométriquement ce résultat.

b. Exprimer | z' | en fonction de | z |. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r.

c. Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que OP = 3, et construire géométriquement son image P' par .f

5. On considère le cercle C_1, de centre J et de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de C_1 distinct de O, appartient à la droite D d'équation $x = 2$.

CORRECTION

1. Soit M un point d'affixe z ($z \neq 0$), M est invariant par $f \Leftrightarrow$ M' = M $\Leftrightarrow z' = z$ ($z \neq 0$) $\Leftrightarrow z = \dfrac{4}{\bar{z}}$ ($z \neq 0$) $\Leftrightarrow z\,\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |\,z\,|^2 = 4$ $\Leftrightarrow \text{OM}^2 = 4 \Leftrightarrow \text{OM} = 2 \Leftrightarrow$ M décrit le cercle de centre O de rayon 2.

2. f (M) = J $\Leftrightarrow 1 = \dfrac{4}{\bar{z}}$ ($z \neq 0$) $\Leftrightarrow \bar{z} = 4 \Leftrightarrow z = 4$

l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1 est réduit au point d'affixe 4.

3. Soit M un point d'affixe z ($z \neq 0$), f (M) = A $\Leftrightarrow \dfrac{4}{\bar{z}} = \alpha \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{4}{\alpha} \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{\bar{\alpha}}$

le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f , d'affixe $\dfrac{4}{\bar{\alpha}}$.

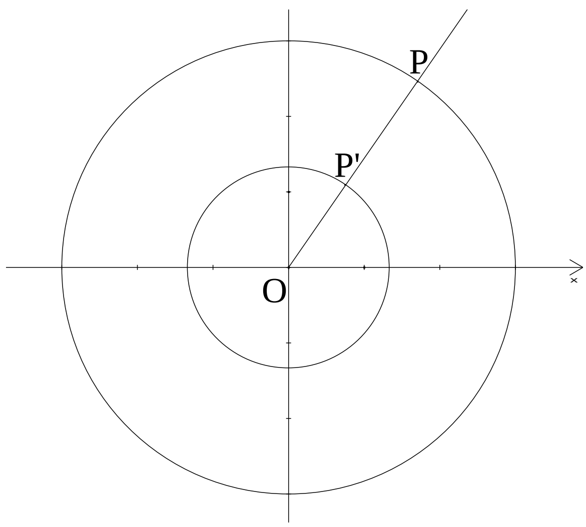
4. *a*. ($\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$) = arg $\dfrac{z'}{z}$ + 2 $k\,\pi \Leftrightarrow$ ($\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$) = arg z' – arg z + 2 $k\,\pi$

$\Leftrightarrow$ ($\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$) = arg 4 – arg $\bar{z}$ – arg z + 2 $k\,\pi$ (or arg $\bar{z}$ = – arg z + 2 $k\pi$ et 4 étant un réel strictement positif, arg 4 = 0 + 2 $k\,\pi$)

$\Leftrightarrow$ ($\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$) = arg z – arg z + 2 $k\,\pi$

$\Leftrightarrow$ ($\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$) = 2 $k\,\pi$

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont donc colinéaires de même sens donc M' appartient à la demi-droite [OM).



b. $z' = \dfrac{4}{\bar{z}}$ donc $|\,z'\,| = \dfrac{4}{|\,\bar{z}\,|} = \dfrac{4}{|\,z\,|}$ donc M $\in C_r \Leftrightarrow$ OM = r

$\Leftrightarrow |\,z\,| = r \Leftrightarrow |\,z'\,| = \dfrac{4}{r} \Leftrightarrow$ OM' = $\dfrac{4}{r} \Leftrightarrow$ M' décrit le cercle de centre O de rayon $\dfrac{4}{r}$.

c. P appartient au cercle de centre O de rayon 3 donc P' appartient au cercle de centre O de rayon $\dfrac{4}{3}$

Pour tout point M du plan, M' appartient à la demi-droite [OM) donc P' appartient à la demi-droite [OP) cette demi-droite coupe le cercle précédent en un seul point P'.

5. M appartient au cercle C_1, de centre J et de rayon 1 $\Leftrightarrow z = 1 + e^{i\,\theta} \Leftrightarrow z' = \dfrac{4}{1 + e^{-i\,\theta}}$

$\Leftrightarrow z' = \dfrac{4}{1+\cos\theta - i\sin\theta} \Leftrightarrow z' = \dfrac{4\,(1+\cos\theta + i\sin\theta)}{(1+\cos\theta - i\sin\theta)\,(1+\cos\theta + i\sin\theta)} \Leftrightarrow z' = \dfrac{4\,(1+\cos\theta - i\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$

$\Leftrightarrow z' = \dfrac{4\,(1+\cos\theta - i\sin\theta)}{1+\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta} \Leftrightarrow z' = \dfrac{4\,(1+\cos\theta - i\sin\theta)}{2+2\cos\theta} \Leftrightarrow z' = \dfrac{4\,(1+\cos\theta)}{2\,(1+\cos\theta)} + i\,\dfrac{-4\sin\theta}{2\,(1+\cos\theta)} \Leftrightarrow z' = 2 + i\,\dfrac{-4\sin\theta}{2\,(1+\cos\theta)}$

Pour tout point M' image d'un point de C_1 distinct de O, on a donc Re $z' = 2$ soit $x' = 2$ donc M' appartient à la droite d'équation $x = 2$

Autre solution :
M appartient au cercle C_1, de centre J et de rayon 1 $\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x$
or $z' = \dfrac{4}{\overline{z}} = \dfrac{4(x + \mathrm{i}\, y)}{x^2 + y^2}$ soit $z' = \dfrac{4(x + \mathrm{i}\, y)}{2x} = 2 + 2\dfrac{y}{x}\,\mathrm{i}$ donc M' appartient à la droite d'équation $x = 2$.