Amérique du Sud novembre 2006

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes. Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$. On définit les évènements suivants :

- A : « le jardinier a choisi le lot 1 »
- B : « le jardinier a choisi le lot 2 »
- J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1?

b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes,

d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. *a*. Montrer que : $P_B(J_n) = \binom{50}{n} 2^{-50}$.

b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. Établir que : $p_n = \dfrac{30^{50-n}}{30^{50-n} + 2^{50}}$

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq 0{,}9$? Comment peut-on interpréter ce résultat ?

CORRECTION

1. *a*. On a une succession de 50 expériences aléatoires identiques et indépendantes (le jardinier choisit une tulipe dans le lot 1). Chaque expérience à deux issues :

- succès : le jardinier a choisi une tulipe jaune ($p = \frac{1}{4}$)
- échec : le jardinier n'a pas choisi une tulipe jaune ($q = 1 - p$ donc $q = \frac{3}{4}$)

la variable aléatoire X qui compte le nombre de tulipes jaunes obtenues suit une loi binomiale de paramètres 50 ; $\frac{1}{4}$.

1. *b*. $E(X) = n\,p = \frac{50}{4} = 12{,}5$ en moyenne, sur un très grand nombre de tirages, le jardinier obtiendra 12,5 tulipes jaunes.

1. *c*. $p(X = n) = \binom{50}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{50-n}$

1. *d*. $p(X = 15) = 0{,}089$

2. *a*. On a une succession de 50 expériences aléatoires identiques et indépendantes (le jardinier choisit une tulipe dans le lot 1). Chaque expérience à deux issues :

- succès : le jardinier a choisi une tulipe jaune ($p = \frac{1}{2}$)
- échec : le jardinier n'a pas choisi une tulipe jaune ($q = 1 - p$ donc $q = \frac{1}{2}$)

la variable aléatoire Y qui compte le nombre de tulipes jaunes obtenues suit une loi binomiale de paramètres 50 ; $\frac{1}{2}$.

$p_B(J_n) = p(Y = n) = \binom{50}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{50-n} = \binom{50}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ soit $p_B(J_n) = \binom{50}{n}2^{-50}$.

2. *b*. L'événement « le jardinier obtient n tulipes jaunes » est la réunion de deux événements incompatibles :

- « le jardinier choisit le lot 1 et obtient n tulipes jaunes » et
- « le jardinier choisit le lot 2 et obtient n tulipes jaunes »

le premier événement est $A \cap J_n$.

Sa probabilité est égale à $p_A(J_n) \times p(A)$ soit $\binom{50}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} \times \frac{1}{2}$

le second événement est $B \cap J_n$. Sa probabilité est égale à $p_B(J_n) \times p(B)$ soit $\binom{50}{n}2^{-50} \times \frac{1}{2}$

la probabilité demandée est donc : $p = p(A \cap J_n) + p(B \cap J_n)$

$$p = \binom{50}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} \times \frac{1}{2} + \binom{50}{n} 2^{-50} \times \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{1}{2}\binom{50}{n}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} + \frac{1}{2^{50}}\right]$$

$$p = \frac{1}{2}\binom{50}{n}\left[\frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2^{50}}\right]$$

2. *c*. en utilisant que $\frac{1}{2^{50}} = \frac{2^{50}}{2^{50} \times 2^{50}} = \frac{2^{50}}{(2\times 2)^{50}} = \frac{2^{50}}{4^{50}}$

$$p_{J_n}(A) = \frac{p(A \cap J_n)}{p(J_n)} = \frac{\frac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{50-n}}{\frac{1}{2}\binom{50}{n}\left[\frac{3^{50-n}+2^{50}}{4^{50}}\right]}$$

or $\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} = \frac{1}{4^n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50-n}} = \frac{3^{50-n}}{4^{n+50-n}} = \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$ donc

$$p_{J_n}(A) = \frac{\left(\frac{3^{50-n}}{4^{50}}\right)}{\left[\frac{3^{50-n}+2^{50}}{4^{50}}\right]} = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}$$

2. *d*. $p_n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}} \geq 0{,}9$

$\Leftrightarrow 3^{50-n} \geq 0{,}9\ (3^{50-n} + 2^{50})$

$\Leftrightarrow (1 - 0{,}9)\ 3^{50-n} \geq 0{,}9 \times 2^{50}$

$\Leftrightarrow 3^{50-n} \geq 9 \times 2^{50}$

$\Leftrightarrow (50 - n) \ln 3 \geq \ln (9 \times 2^{50})$

$\Leftrightarrow 50 - n \geq \frac{\ln (9\times 2^{50})}{\ln 3}$

$\Leftrightarrow 0 \leq n \leq 50 - \frac{\ln (9\times 2^{50})}{\ln 3}$

or $50 - \frac{\ln (9\times 2^{50})}{\ln 3} \approx 16{,}45$ donc $p_n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 16$