Introduction aux développements limités

1 Définitions

Lorsque deux quantités a et b sont reliées entre elles, la relation $b(a)$ est parfois trop complexe pour permettre des calculs rapides. Le développement limité peut alors être utilisé pour obtenir une *approximation* de la fonction $b(a)$, dans le cas où a prend des valeurs proches d'une valeur de référence notée a_0.

Si la quantité a est proche de a_0, la valeur de $b(a)$ sera également proche de $b(a_0)$: on définit les écarts $\Delta a = a - a_0$ et $\Delta b = b(a) - b(a_0)$. L'objectif est de déterminer la variation de $b(a)$ par rapport à $b(a_0)$ en fonction de l'écart Δa, sous la forme d'un développement limité, c'est à dire d'une somme de termes du type :

$$\begin{aligned} b(a) &= b(a_0) + \alpha\,\Delta a + \beta\,\Delta a^2 + \gamma\,\Delta a^3 + \dots \\ \text{soit : } b(a) &= b(a_0) + \alpha\,(a-a_0) + \beta\,(a-a_0)^2 + \gamma\,(a-a_0)^3 + \dots \qquad (1) \end{aligned}$$

où α, β, $\gamma\ldots$, sont des constantes à déterminer. Le terme $b(a_0)$ est appelé terme d'ordre 0, les termes en Δa, Δa^2 et Δa^3 sont les termes du premier, second et troisième ordre, etc...

Il faut en général une infinité de termes de ce type pour obtenir une précision parfaite dans la description de $b(a)$. Toutefois, si Δa est faible, les termes d'ordre élevé constituent des corrections minuscules par rapport aux premiers termes. En pratique, on peut souvent se contenter de calculer une valeur approchée de $b(a)$ de la façon suivante :

– Développement limité à l'ordre 1 : $b(a) \approx b(a_0) + \alpha\,\Delta a$
– Développement limité à l'ordre 2 : $b(a) \approx b(a_0) + \alpha\,\Delta a + \beta\,\Delta a^2$

et ainsi de suite, l'approximation étant meilleure pour les développements d'ordre plus élevé.

Ces définitions posées, il reste à trouver la recette permettant de déterminer α, β, $\gamma\ldots$. Afin de trouver ces valeurs, nous invitons le lecteur à dériver plusieurs fois la relation (1) au point de référence a_0. On obtient :

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}(a_0) = \alpha, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}a^2}(a_0) = 2\times\beta, \qquad \frac{\mathrm{d}^3 b}{\mathrm{d}a^3}(a_0) = 2\times 3\times\gamma, \qquad \ldots$$

et ainsi de suite. Donc, $b(a)$ ne peut être égal au développement limité (1) que si α, β, $\gamma\ldots$ prennent des valeurs bien précises.

Ainsi, lorsque pour une fonction $b(a)$ on connaît la valeur de b et de ses n premières dérivées en un point de référence a_0, on peut approximer b au point $a = a_0 + \Delta a$ par un développement limité à l'ordre n, selon la formule suivante (théorème de Taylor) :

$$\boxed{b(a) \approx b(a_0) + \underbrace{\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}(a_0)}_{\alpha}\cdot\Delta a + \underbrace{\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}a^2}(a_0)}_{\beta}\cdot\Delta a^2 + \underbrace{\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3 b}{\mathrm{d}a^3}(a_0)}_{\gamma}\cdot\Delta a^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n b}{\mathrm{d}a^n}(a_0)\cdot\Delta a^n}$$

La notation $n!$ se lit “factorielle n” et désigne le produit $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$. Il est bien entendu nécessaire que $b(a)$ soit au moins n fois dérivable pour que le développement de Taylor soit valable. L'erreur commise étant au maximum de l'ordre de Δa^{n+1}, elle sera plus faible que tous les autres termes d'ordre 0 à n, à condition que l'écart Δa soit suffisamment petit. La plupart du temps les physiciens remplacent le signe $\approx$ dans l'équation précédente par un signe $=$, tout en gardant en mémoire que ceci ne se justifie que pour des valeurs de Δa faibles. Notons que le développement ci-dessus est plus souvent écrit sous la forme équivalente :

$$\boxed{\begin{aligned} b(a) \approx\ & b(a_0) + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}(a_0) \cdot (a - a_0) + \frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}a^2}(a_0) \cdot \frac{(a-a_0)^2}{2} + \frac{\mathrm{d}^3 b}{\mathrm{d}a^3}(a_0) \cdot \frac{(a-a_0)^3}{6} \\ & + \ldots + \frac{\mathrm{d}^n b}{\mathrm{d}a^n}(a_0) \cdot \frac{(a-a_0)^n}{n!} \end{aligned}} \tag{2}$$

Cas particulier : si le point de référence vaut $a_0 = 0$, la quantité Δa est simplement égale à a, ce qui donne :

$$b(a) \approx b(0) + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}(0) \cdot a + \frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}a^2}(0) \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{\mathrm{d}^3 b}{\mathrm{d}a^3}(0) \cdot \frac{a^3}{6} + \ldots + \frac{\mathrm{d}^n b}{\mathrm{d}a^n}(0) \cdot \frac{a^n}{n!} \tag{3}$$

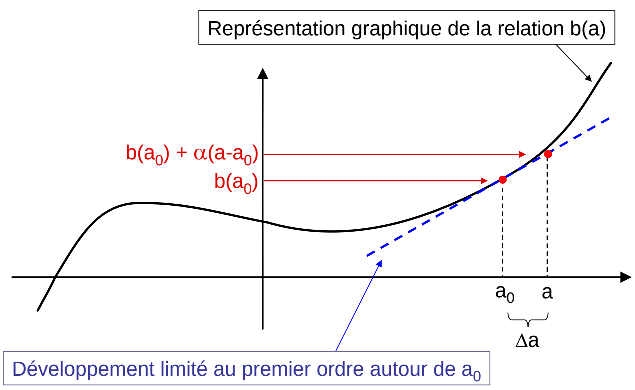
2 Le développement limité au premier ordre

Le développement limité au premier ordre est le plus simple à comprendre et à manipuler, puisqu'il considère que la variation Δb est proportionnelle à la variation Δa. En effet, le développement au premier ordre peut s'écrire de façon indifférente :

$$b(a) \approx b(a_0) + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}(a_0) \cdot (a - a_0) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Delta b}{\Delta a} \approx \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}(a_0) \tag{4}$$

Cette dernière formule est triviale lorsque Δa et Δb sont des différentielles, c'est à dire des variations arbitrairement petites. L'approximation au premier ordre revient à considérer que la relation de proportionnalité (4) reste valable même si Δa et Δb sont non-négligeables.

D'un point de vue graphique, le développement limité au premier ordre revient à approximer $b(a)$ par l'équation d'une droite : celle de la tangente à la courbe au niveau du point de référence a_0. Comme on le voit sur l'exemple ci-contre, l'approximation au premier ordre ne fournit pas la valeur exacte de b. Toutefois, l'erreur commise reste négligeable tant que a reste proche du point de référence, la courbe et la droite pouvant être confondues.

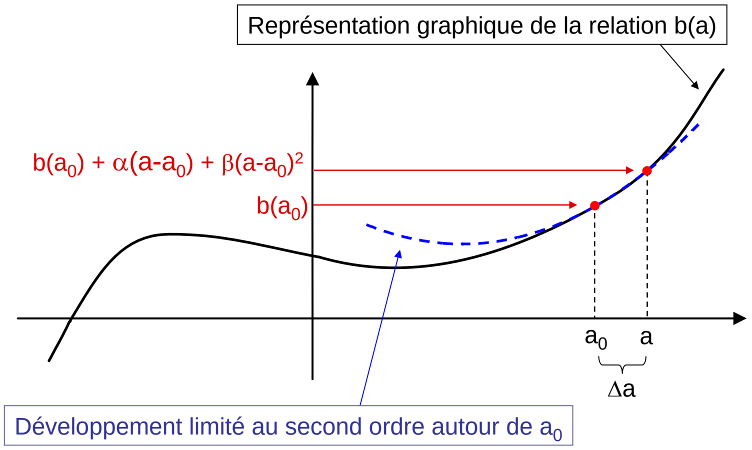


3 Les développements limités aux ordres supérieurs

Si l'on s'éloigne un peu trop du point de référence, l'approximation du développement au premier ordre n'est plus satisfaisante. On peut trouver une meilleure approximation de $b(a)$ en "tordant" la droite tangente, c'est-à-dire en rajoutant un terme polynomial en $(a - a_0)^2$ pour que la nouvelle approximation "colle" mieux à la courbe exacte :

$$b(a) \approx b(a_0) \; + \; \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}(a_0) \cdot (a - a_0) \; + \; \frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}a^2}(a_0) \cdot \frac{(a - a_0)^2}{2} \qquad (5)$$

Un tel développement limité, d'ordre 2, fait intervenir un polynôme du second degré : d'un point de vue graphique, il consiste donc à approximer la courbe de $b(a)$ par une *parabole*, dont la courbure est déterminée par la dérivée seconde $\frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}a^2}(a_0)$. L'approximation est meilleure et reste valide pour des écarts Δa plus importants.



On remarque par contre qu'un développement limité du second ordre ne permet pas de reproduire le point d'inflexion d'une courbe (point où la dérivée seconde s'annule et change de signe), puisque la courbure d'une parabole est toujours orientée dans le même sens ; pour aller plus loin il est nécessaire de passer au développement limité d'ordre 3 ou plus. De façon générale, un développement limité permet d'approximer une fonction par un polynôme : plus il y a de termes polynomiaux dans le développement, meilleure sera l'approximation.