

EQUATION DU SECOND DEGRE

Vocabulaire et interprétation graphique

$f(x) = 0$ où f désigne la fonction définie sur \mathbb{R} comme suit : $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

La fonction f est une fonction polynôme de degré deux encore appelée, par abus de langage, « trinôme du second degré ».

→ Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ revient alors à déterminer l'abscisse des éventuels points d'intersection de la courbe représentative de la fonction f (rappelons qu'il s'agit d'une parabole) et de l'axe des abscisses.

Mise sous forme canonique

Une fois encore, les identités remarquables vont nous être utiles :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$ s'appelle « la forme canonique » du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On pose alors $\Delta = b^2 - 4ac$. Δ est appelé « le discriminant » de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

On a finalement : $ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$.

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

La forme canonique obtenue précédemment va nous permettre de conclure.

Nous menons la discussion d'après le signe de Δ :

- **1^{er} cas : $\Delta < 0$**

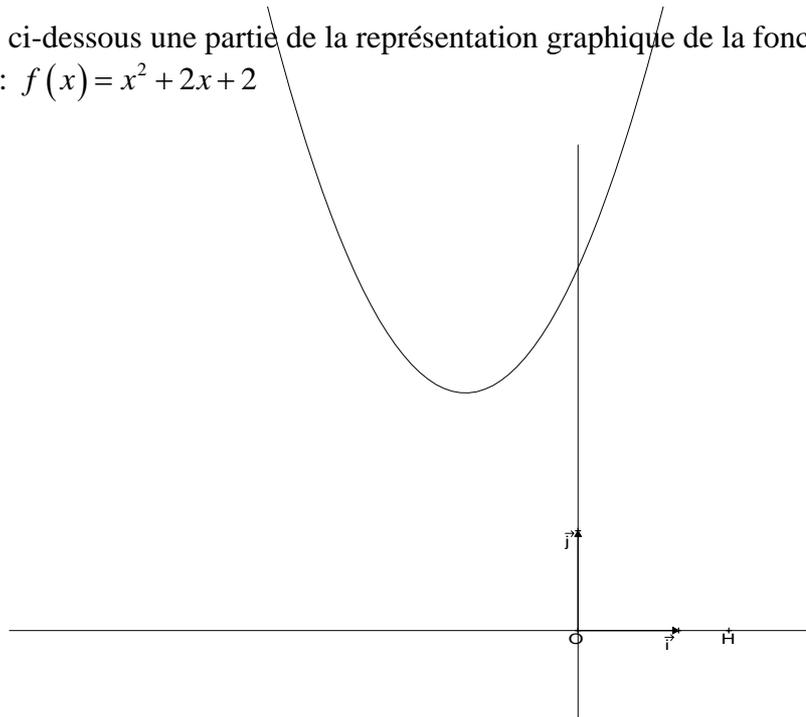
Dans ce cas, on a : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ et $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$. D'où : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

Finalement : $a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \neq 0$ et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution.

→ La courbe représentative de la fonction f ne coupe pas l'axe des abscisses.

Exemple

On a fourni ci-dessous une partie de la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 2x + 2$



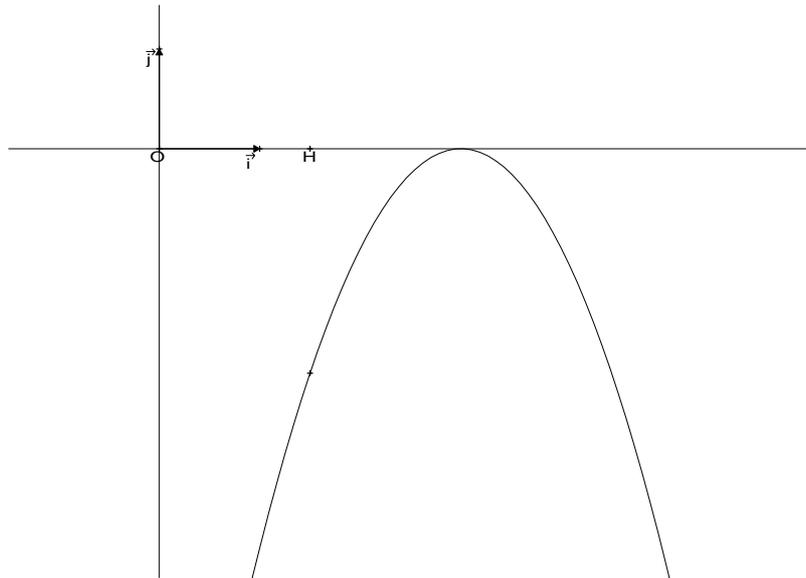
- 2^{ème} cas : $\Delta = 0$

L'équation se réécrit : $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ soit : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$.

L'équation admet donc une seule solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

→ La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un unique point qui est le sommet de la parabole représentant f . De plus, l'axe des abscisses est tangent à la parabole en ce point.

Exemple On a fourni ci-dessous une partie de la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2$



- **3^{ème} cas : $\Delta > 0$**

La forme canonique se réécrit :

$$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

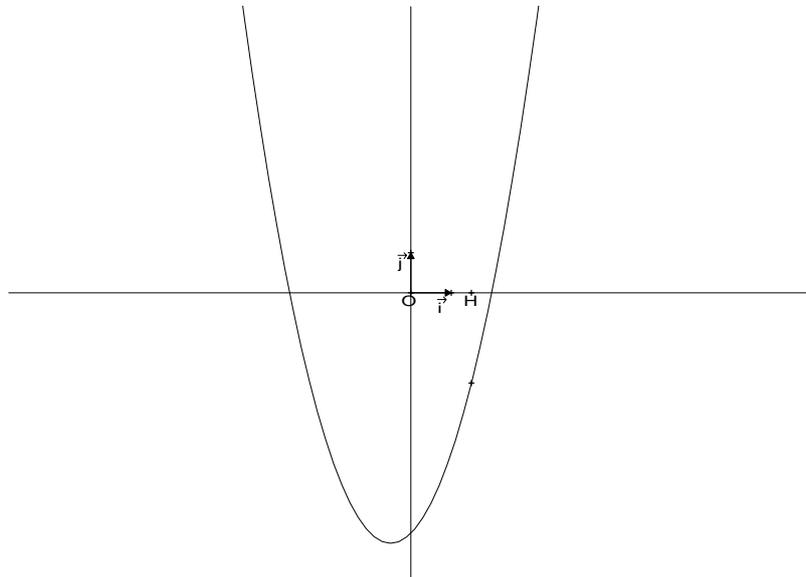
$$= a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

L'équation initiale est alors équivalente à : $a \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$.

Elle admet les deux solutions suivantes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Note : $x_1 \neq x_2$ (calculer la différence et conclure).

→ La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_1 et x_2 .



Exemple On a fourni ci-dessus une partie de la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

Synthèse

Discriminant	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Factorisation de $ax^2 + bx + c = 0$
$\Delta < 0$	Pas de solution	Pas de factorisation
$\Delta = 0$	Une seule solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	$a(x - x_0)^2$
$\Delta > 0$	Deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

Méthode générale de résolution d'une équation du second degré

Elle repose sur les étapes principales suivantes :

1. Placer tous les termes dans un même membre ;
2. Le cas échéant, factoriser sans développer. Si une factorisation ne semble pas possible, développer et réduire en ordonnant les termes suivant les puissances décroissantes de l'inconnue ;
3. Si une factorisation a été effectuée : donner les racines et conclure ;
4. Si aucune factorisation n'a pu être obtenue :
 - a. Simplifier éventuellement l'écriture de l'équation ;
 - b. Calculer le discriminant et conclure.

Synthèse

Discriminant	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Factorisation de $ax^2 + bx + c = 0$
$\Delta < 0$	Pas de solution	Pas de factorisation
$\Delta = 0$	Une seule solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	$a(x - x_0)^2$
$\Delta > 0$	Deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

Méthode générale de résolution d'une équation du second degré

Elle repose sur les étapes principales suivantes :

1. Placer tous les termes dans un même membre ;
2. Le cas échéant, factoriser sans développer. Si une factorisation ne semble pas possible, développer et réduire en ordonnant les termes suivant les puissances décroissantes de l'inconnue ;
3. Si une factorisation a été effectuée : donner les racines et conclure ;
4. Si aucune factorisation n'a pu être obtenue :
 - a. Simplifier éventuellement l'écriture de l'équation ;
 - b. Calculer le discriminant et conclure.